MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

58. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 28. MAI 1953)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

58. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Brauer, A., On a new class of Hadamard determinants 219

Brauer, A., On the Distribution of the Jacobian Symbols 226

Gaier, D., und A. Peyerimhoff, Summierbarkeitsfaktoren bei Eulerschen Reihentransformationen 232

Huppert, B., Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen 243

Ingraham, R. L., Linear Connection in Spin-Collineation Space 265

Grotemeyer, K. P., Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschattengrenze ist 272

Rieger, G. J., Über eine Verallgemeinerung des Waringschen Problems 281

Volkmann, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. I. 284

Zeller, K., *FK*-Räume in der Funktionentheorie. I. 288

Foster, A. L., Generalized "Boolean" theory of universal algebras 306

Brauer, A.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 219—225 (1953)

On a new class of Hadamard determinants.

To my teacher Konrad Knopp belatedly on his seventieth birthday.

By
Alfred Brauer.

O. Perron[1]) just published a number of theorems on the distribution of quadratic residues. Some of these results are corollaries of the following theorem of E. Jacobsthal[2]):

If p is an odd prime and c an integer not divisible by p, then

$$\sum_{x=1}^{p}\left(\frac{x^2+c}{p}\right)=-1. \tag{1}$$

Moreover, Perron proved the following theorem:

Let p be a prime of form $4n-1$ and $r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$ the quadratic residues (mod p), including the number 0. Let R be the matrix which is obtained from the matrix

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_{2n} \\ r_1+1 & r_2+1 & \ldots & r_{2n}+1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1+p-1 & r_2+p-1 & \ldots & r_{2n}+p-1 \end{pmatrix}$$

by reducing the elements (mod p). Then each row of R has exactly n elements in common with each other row.

As early as 1920, H. Hopf showed me his proof of this theorem using (1), and its application to the construction of Hadamard determinants of order $p+1=4n$. He never published it since I. Schur already knew this result at that time. Independently this theorem and its application to Hadamard determinants were published by R. E. A. Paley[3]) in 1933.

Perron studies more general matrices of $4n-1$ rows and $2n$ columns whose elements are the numbers of a complete system of residues (mod $4n-1$) and which have the following two properties.

I. Each row has exactly n elements in common with each other row.

II. The corresponding elements of each pair of two rows have the same difference (mod $4n-1$).

---

[1]) Bemerkungen über die Verteilung der quadratischen Reste. Math. Z. **56**, 122—130 (1952).

[2]) Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste. Diss. Berlin 1906.

[3]) On orthogonal matrices. J. Math. Phys. **12**, 311—320 (1933).

Obviously the matrix R satisfies these conditions. For small values of n Perron determines the number of such matrices which are essentially different. He raises the question whether such matrices exist if $4n-1=m$ is composite. He gives a very interesting example for $m=15$.

It will be proved in this paper that this example is a special case of the following theorem:

If p and $p+2$ are twin primes, then there exist such matrices for $m=p(p+2)$.

Let us now consider matrices which have the property I, but not necessarily the property II. To each such matrix S_1 corresponds a matrix S_2 whose elements are those $2n-1$ elements of a complete system of residues (mod $4n-1$) which are not elements of the corresponding row of S_1. It follows that S_2 is a matrix of $4n-1$ rows and $2n-1$ columns which has the property that any two rows have exactly $n-1$ elements in common. If for a given $4n-1$ a matrix S_1 exists, then S_2 exists, and conversely. It was proved by J. A. TODD[4]) that such a matrix S_2 with $4n-1$ rows exists if and only if an Hadamard determinant of order $4n$ exists.

An Hadamard determinant of order N is a determinant whose elements are equal to ± 1 and which has the maximal value $N^{N/2}$ according to Hadamard's determinant theorem. It follows from the proof of this theorem that an Hadamard determinant must be orthogonal and its order must be 2 or a multiple of 4. J. J. SYLVESTER[5]) considered such determinants, and later they were studied by U. SCARPIS[6]), R. E. GILMAN[7]), PALEY[3]), TODD[4]), H. S. M. COXETER[8]), and J. W. WILLIAMSON[9]).

The existence of such determinants of order $N>1$ has been proved only for the following cases where p denotes an odd prime.

I. $N=2^k$,

II. $N=p^k+1\equiv 0 \pmod 4$,

III. $N=h(p^k+1)$ where $h\geq 2$ is the order of an Hadamard determinant,

IV. $N=h^*(h^*-1)$ where h^* is a product of numbers of forms I and II,

V. $N=172$,

VI. $N=h^*(h^*+3)$ where h^* and h^*+4 both are products of numbers of forms I and II,

---

[4]) A combinatorial problem. J. Math. Phys. **12**, 321—333 (1933).

[5]) Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions, and tesselated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers. Phil. Mag. (4) **34**, 461—475 (1867) or Coll. Math. Papers **2**, 615—628 (1908).

[6]) Sui determinanti di valore massimo. Rend. R. Ist. Lombardo Sci. e Lett. (2) **31**, 1441—1446 (1898).

[7]) On the Hadamard determinant theorem and orthogonal determinants. Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 30—31 (1931).

[8]) Regular compound polytopes. J. Math. Phys. **12**, 334—345 (1933).

[9]) Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares. Duke Math. J. **11**, 65—81 (1944). — Note on Hadamard's determinant theorem. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 608—613 (1947).

VII. $N = h_1 h_2 (p^k + 1)\, p^k$ where $h_1 > 1$ and $h_2 > 1$ are orders of Hadamard determinants,

VIII. $N = h_1 h_2 s\,(s+3)$ where $h_1 > 1$ and $h_2 > 1$ are both orders of Hadamard determinants and where s and $s+4$ are both of the form $p^k + 1$,

IX. N is the product of numbers of the forms I—VIII.

In this paper it will be shown that Hadamard determinants of order $p(p+2)+1$ and of order $P\{p(p+2)+1\}$ exist where p and $p+2$ are twin primes and P is the product of numbers of the forms I—VIII.

Theorem 1. *Let p and $p+2$ be a pair of twin primes and $m = p(p+2)$. Let $a_1, a_2, \ldots, a_t$ be those numbers in the interval $\{0 \ldots m\}$ for which the Jacobian symbol $(a_\tau/m) = 1$. Let M be the matrix which is obtained from the matrix*

$$\left.\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_t & p & 2p & \ldots & (p+1)p \\ a_1+1 & a_2+1 & \ldots & a_t+1 & p+1 & 2p+1 & \ldots & (p+1)p+1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_1+m-1 & a_2+m-1 & \ldots & a_t+m-1 & p+m-1 & 2p+m-1 & \ldots & (p+1)p+m-1 \end{array}\right)$$

by reducing the elements (mod m) and permuting the columns so that the elements of the first row are in natural order. Then M is a matrix with $m = 4n-1$ rows and $2n$ columns. Each row has exactly n elements in common with each other row, and the corresponding elements of each pair of two rows have the same difference (mod m).

Proof. Since $m = p^2 + 2p \equiv 3 \pmod 4$, we can set $m = 4n-1$. The number of columns is

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}\varphi(m) + p + 1 = \tfrac{1}{2}(p-1)(p+1) + p + 1 = \tfrac{1}{2}(p+1)^2 = \tfrac{1}{2}(m+1) = 2n.$$

It is obvious that the corresponding elements of two rows have the same difference (mod m). Hence, as Perron[1]) pointed out, it is sufficient to show that each row has exactly n elements in common with the first row in order to prove that the same holds for each pair of two rows. For, if the $\varkappa - \lambda + 1$st row has exactly n elements in common with the first row, and if to each pair of equal elements the number $\lambda - 1$ is added, then n pairs of equal elements of the $\varkappa$th and λth rows are obtained.

The elements of the $d+1$st row are obtained by adding d to the elements of the first row. We call the common element $a+d$ of these two rows an element of the first kind if $(a, m) = (a+d, m) = 1$, an element of the second kind if $a \equiv 0 \pmod p$, and an element of the third kind if $a + d \equiv 0 \pmod p$, but $a \not\equiv 0 \pmod p$. We denote the number of these elements by C_1, C_2, and C_3, respectively.

We have to consider three cases.

1. $\left(\frac{d}{m}\right) = \pm 1$.

In the paper which follows this one it will be proved that there exist exactly $\frac{1}{4}(p-1)^2$ numbers c for which

$$\left(\frac{c}{m}\right) = \left(\frac{c+d}{m}\right) = 1 \tag{3}$$

if $(d, m) = 1$. If, however, (3) holds, then c and $c+d$ are elements of the first row. Hence $c+d$ is an element of the $d+1$st row and therefore a common element of the first kind. Conversely, if $c+d$ is a common element of the first kind, then c and $c+d$ must satisfy (3). It follows that

$$C_1 = \tfrac{1}{4}(p-1)^2. \tag{4}$$

The numbers

$$p+d, 2p+d, \ldots, (p+2)p+d, \tag{5}$$

except the last, are elements of the $d+1$st row if reduced (mod m). On the other hand, they form a complete system of residues (mod $p+2$). Hence $\frac{1}{2}(p+1)$ of them are quadratic residues (mod $p+2$), $\frac{1}{2}(p+1)$ are quadratic non-residues, and one is divisible by $p+2$. Since the numbers (5) are congruent (mod p), exactly $\frac{1}{2}(p+1)$ of them have the property that their Jacobian symbols have the value 1, hence they are elements of the first row if reduced (mod m). It follows that

$$\begin{cases} C_2 = \frac{1}{2}(p-1) & \text{if} \quad \left(\frac{d}{m}\right) = 1, \\ C_2 = \frac{1}{2}(p+1) & \text{if} \quad \left(\frac{d}{m}\right) = -1, \end{cases} \tag{6}$$

because the last element of (5) is congruent to d (mod m).

Finally we have to determine C_3. For this purpose we consider the numbers

$$p-d, 2p-d, \ldots, (p+2)p-d. \tag{7}$$

They form a complete system of residues (mod $p+2$). It follows as above that for $\frac{1}{2}(p+1)$ of these numbers the Jacobian symbols (mod m) equal 1. Hence $\frac{1}{2}(p+1)$ of the numbers (7) are congruent (mod m) to elements of the first row. If d is added to them, elements of the $d+1$st row are obtained which, except for $(p+2)p$, are common elements of the third kind. Hence

$$\begin{cases} C_3 = \frac{1}{2}(p-1) & \text{if} \quad \left(\frac{-d}{m}\right) = 1, \\ C_3 = \frac{1}{2}(p+1) & \text{if} \quad \left(\frac{-d}{m}\right) = -1. \end{cases} \tag{8}$$

Now $\left(\frac{-d}{m}\right) = -\left(\frac{d}{m}\right)$ since $m \equiv -1 \pmod 4$. Hence it follows from (6) and (8) that

$$C_2 + C_3 = \tfrac{1}{2}(p-1) + \tfrac{1}{2}(p+1) = p,$$

and from (4) and (2) that

$$C_1 + C_2 + C_3 = \tfrac{1}{4}(p-1)^2 + p = \tfrac{1}{4}(p+1)^2 = n. \tag{9}$$

2. $(d/p)=0$. The first row contains $p+1$ multiples of p. If d is added to them, then elements of the $d+1$st row are obtained, which, except for $(p+2)p$, are common elements of the second kind, hence $C_2=p$.

Now let b be an arbitrary number such that $1\leqq b<p$. The numbers

$$b, b+d, \ldots, b+(p+1)d \tag{10}$$

form a complete system of residues (mod $p+2$). If we divide them by d (mod $p+2$), then we obtain $p+2$ consecutive numbers. This sequence contains[10])

$$L_1=\frac{1}{4}\left\{p-2-\left(\frac{-1}{p+2}\right)\right\} \tag{11}$$

pairs of consecutive quadratic residues (mod $p+2$) and

$$L_2=\frac{1}{4}\left\{p+\left(\frac{-1}{p+2}\right)\right\} \tag{12}$$

pairs of consecutive quadratic non-residues (mod $p+2$). Hence the progression (10) contains L_1 sequences of two quadratic residues and L_2 sequences of two quadratic non-residues if $\left(\frac{d}{p+2}\right)=1$, and L_2 such sequences of residues and L_1 sequences of non-residues if $\left(\frac{d}{p+2}\right)=-1$.

All the elements of (10) are quadratic residues (mod p) if $(b/p)=1$, and quadratic non-residues if $(b/p)=-1$. For those $\frac{1}{2}(p-1)$ numbers b which are quadratic residues (mod p) we have to count the number of pairs of consecutive residues (mod $p+2$) in (10) and for the $\frac{1}{2}(p-1)$ non-residues b (mod p) we have to count the number of pairs of consecutive non-residues (mod $p+2$) in order to obtain the number of pairs of consecutive elements in (10) whose Jacobian symbols (mod m) equal 1. If follows that for a given value of d the total number T of such pairs in all the progressions (10) for $b=1, 2, \ldots, p-1$ is

$$T=\tfrac{1}{2}(p-1)(L_1+L_2). \tag{13}$$

The elements of each of these pairs satisfy (3). Conversely, if c and $c+d$ are numbers satisfying (3), then they are consecutive numbers of one of the progressions (10). It follows as in 1. that $C_1=T$, hence by (13), (11), and (12),

$$C_1=\frac{p-1}{8}\left\{p-2-\left(\frac{-1}{p+2}\right)+p+\left(\frac{-1}{p+2}\right)\right\}=\frac{(p-1)^2}{4}. \tag{14}$$

Since in this case $C_3=0$, it follows that

$$C_1+C_2+C_3=\tfrac{1}{4}(p+1)^2. \tag{15}$$

3. $\left(\frac{d}{p+2}\right)=0$. The computation of C_1 is similar to that in 2. Only the roles of p and $p+2$ are interchanged. Instead of (10) we consider the progressions

$$b, b+d, \ldots, b+(p-1)d \qquad (b=1, 2, \ldots, p+1).$$

[10]) See, for instance, l. c. [1]) or l. c. [2]).

We replace $p+2$ by p in (11) and (12) and p by $p+2$ in (13). We obtain instead of (14)

$$(16) \quad C_1 = \frac{p+1}{8}\left\{p-4-\left(\frac{-1}{p}\right)+p-2+\left(\frac{-1}{p}\right)\right\} = \frac{(p+1)(p-3)}{4}.$$

Finally we have to determine C_2 and C_3 for this case. The last elements of (5) and (7) are here divisible by $p+2$, hence their Jacobian symbols (mod m) equal 0. It follows that the common elements of the second kind are the $\frac{1}{2}(p+1)$ elements of (5) whose Jacobian symbols equal 1; those of the third kind are obtained if d is added to the $\frac{1}{2}(p+1)$ elements of (7) whose Jacobian symbols (mod m) equal 1. Hence

$$(17) \quad C_2 = C_3 = \tfrac{1}{2}(p+1),$$

and by (16) and (17)

$$(18) \quad C_1 + C_2 + C_3 = \tfrac{1}{4}(p+1)(p-3) + p + 1 = \tfrac{1}{4}(p+1)^2 = n.$$

The theorem follows now from (9), (15), and (18).

In a similar way we can prove

Theorem 1a. *If in Theorem 1 the elements $a_1, a_2, \ldots, a_t$ of the first row of the matrix M are replaced by those numbers whose Jacobian symbols (mod m) equal -1 and the elements of the other rows are changed correspondingly, then a matrix with the same properties is obtained.*

Another proof of this theorem follows from the remark of Perron[1]) that if in a matrix with the properties I and II the elements b of the first row are replaced by $m-b$, a matrix with the same properties is obtained. Theorems 1 and 1a always give essentially different matrices since the first row of the second matrix has no element whose Jacobian symbol equals 1 while the first matrix does not have such a row.

For $m=15$ the matrices obtained from Theorems 1 and 1a are essentially those of Perron. To show this, it is only necessary to permute the rows.

Theorem 2. *If p and $p+2$ are primes, then there exist Hadamard determinants of order $m+1=p(p+2)+1=(p+1)^2$.*

Proof. We construct the determinant in the following way. If in the matrix M of Theorem 1 the $\varkappa$th row contains the number λ, then we choose

$$a_{\varkappa\lambda} = 1 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

and otherwise

$$a_{\varkappa\lambda} = -1 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

Moreover, we set

$$a_{m+1,\nu} = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m+1),$$

$$a_{\nu,m+1} = -1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Each of the first m rows contains $\frac{1}{2}(m+1)$ elements 1, hence $\frac{1}{2}(m+1)$ elements -1, and is therefore orthogonal to the last row. Let us now consider the $\varkappa$th

and the λth rows for $\varkappa \neq \lambda$, $\varkappa \neq m+1$, $\lambda \neq m+1$. It follows from Theorem 1 that there exist $\frac{1}{4}(m+1)$ columns whose elements in the $\varkappa$th and λth rows are both equal to 1. There are $\frac{1}{4}(m+1)$ columns whose elements in the $\varkappa$th row equal 1 while those of the λth row equal -1 and $\frac{1}{4}(m+1)$ columns whose elements in the $\varkappa$th row equal -1 while those of the λth row equal 1. Hence all the elements of the remaining $\frac{1}{4}(m+1)$ columns and the $\varkappa$th and λth rows equal -1. It follows that the $\varkappa$th and λth rows are orthogonal. Hence all the rows are orthogonal and the determinant is an Hadamard determinant.

It follows, for instance, from Theorem 2 that Hadamard determinants of order $N = 324$ exist. The number 324 is not of one of the forms I—IX.

Since the direct product of two Hadamard matrices is again an Hadamard matrix, we obtain.

Theorem 3. *Let P be a product of numbers of the forms I—VIII. If p and $p+2$ are twin primes, then there exist Hadamard determinants of order $P\{p(p+2)+1\}$.*

University of North Carolina, Chapel Hill, N.C. (U.S.A.).

(Eingegangen am 17. November 1952.)

Brauer, A.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 226—231 (1953)

On the Distribution of the Jacobian Symbols.

To Ernst Jacobsthal on his 70th birthday.

By
Alfred Brauer.

Let p be an odd prime. We denote the number of pairs of consecutive quadratic residues in a complete system of residues (mod p) by P^{++}, the number of pairs of consecutive non-residues by P^{--}, the number of sequences of one residue and one non-residue by P^{+-}. Similarly we define P^{-+}. In 1896, N. S. Aladov[1]) determined these four numbers.

E. Jacobsthal[2]), in his dissertation, proved that

$$\sum_{x=1}^{p}\left(\frac{x^2+d}{p}\right)=-1 \quad \text{for} \quad (d,p)=1$$

and used this formula for the computation of the numbers P^{++}, P^{--}, P^{+-}, P^{-+}. Moreover, he determined the number of sequences of three quadratic residues, of three quadratic non-residues, and the number of the other sequences of length 3 in a complete system of residues (mod p). Finally he obtained some results for sequences of length 4.

Sequences of more than three terms were studied by the author[3]), K. Doerge[4]), H. Hopf[5]), H. Davenport[6]), H. Salié[7]), R. Rado[8]), L. J. Mordell[9]), and H. Hasse[10]).

---

[1]) Aladov, N. S.: Sur la distribution des résidus et non-résidus quadratiques d'un nombre premier dans la suite 1, 2, ..., $p-1$. Mat. Sbornik **18**, 61—75 (1896).

[2]) Jacobsthal, E.: Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste. Diss. Univ. Berlin 1906. — Über die Darstellung der Zahlen der Form $4n+1$ als Summe zweier Quadrate. J. reine angew. Math. **132**, 238—250 (1907).

[3]) Brauer, Alfred: (a) Über Sequenzen von Potenzresten. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **1928**, 9—16; **1931**, 329—341. — (b) Über die Verteilung der Potenzreste. Math. Z. **35**, 39—50 (1932).

[4]) Doerge, K.: Zur Verteilung der quadratischen Reste. Jber. dtsch. Math.-Verein. **38**, 41—49 (1929).

[5]) Hopf, H.: Über die Verteilung der quadratischen Reste. Math. Z. **32**, 222—231 (1930).

[6]) Davenport, H.: On the distribution of quadratic residues (mod p). J. London Math. Soc. **6**, 49—54 (1931); **8**, 46—52 (1933).

[7]) Salié, H.: Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$. Math. Z. **34**, 91—109 (1931). — Über die Verteilung der quadratischen Reste. Math. Z. **37**, 594—602 (1933).

[8]) Rado, R.: Verallgemeinerung eines Satzes von van der Waerden mit Anwendung auf ein Problem der Zahlentheorie. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **1933**, 589—596.

[9]) Mordell, L. J.: The number of solutions of some congruences in two variables. Math. Z. **37**, 193—209 (1933).

[10]) Hasse, H.: Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Abh. math. Seminar Hamburg. Univ. **10**, 325—348 (1934). — Vorlesungen über Zahlentheorie, § 10. Berlin: Springer 1950.

In this paper the corresponding problem for sequences of Jacobian symbols (mod m) of length 2 is solved. A special case of the obtained results is used in the preceeding paper for the construction of Hadamard determinants of order $p(p+2)+1$ where p and $p+2$ are twin primes.

One of the 9 numbers which will be determined is of independent interest. It is the number M^{00} of pairs c and $c+1$ whose Jacobian symbols (mod m) both equal 0 since M^{++} can be defined without using Jacobian symbols as the number of integers c in a complete system of residues (mod m) for which $(c, m) > 1$ and $(c+1, m) > 1$.

In a similar way, some of the results of the mentioned papers on sequences of more than two quadratic residues or non-residues could be generalized for Jacobian symbols. For instance, the author[11]) proved that for each integer s and all sufficiently large primes p there always exist sequences of s quadratic residues and sequences of s non-residues (mod p). Using this result and our method the following theorem of RADO[12]) can be obtained easily. For each s and all integers m whose prime divisors are all sufficiently large, there exist sequences of s integers whose Jacobian symbols (mod m) equal 1 and sequences of s integers whose Jacobian symbols equal -1.

For any modulus t we denote the number of pairs c and $c+1$ in a complete system of residues (mod t) for which the Jacobian symbols are both positive by T^{++} and the number of pairs for which $\left(\frac{c}{t}\right)$ is positive and $\left(\frac{c+1}{t}\right)$ is negative by T^{+-}. Correspondingly we define $T^{+0}, T^{-+}, \ldots, T^{00}$. If the modulus is m, then we use the notations M^{++}, M^{+-}, and so on.

Theorem 1. *Let m be an odd squarefree number, p a prime divisor of m, and $m = k\,p$. Then we have*

$$M^{++} = K^{++}P^{++} + K^{--}P^{--} + K^{+-}P^{+-} + K^{-+}P^{-+}, \tag{1}$$

$$M^{--} = K^{++}P^{--} + K^{--}P^{++} + K^{+-}P^{-+} + K^{-+}P^{+-}, \tag{2}$$

$$M^{+-} = K^{++}P^{+-} + K^{--}P^{-+} + K^{+-}P^{++} + K^{-+}P^{--}, \tag{3}$$

$$M^{-+} = K^{++}P^{-+} + K^{--}P^{+-} + K^{+-}P^{--} + K^{-+}P^{++}. \tag{4}$$

Proof. Let a be an integer such that a and $a+1$ are relatively prime to m. We set $\left(\frac{a}{k}\right) = \varepsilon_1$ and $\left(\frac{a+1}{k}\right) = \varepsilon_2$. We determine b such that $\left(\frac{b}{p}\right) = \varepsilon_1$ and $\left(\frac{b+1}{p}\right) = \varepsilon_2$. The simultaneous congruences

$$x \equiv a \pmod{k}, \qquad x \equiv b \pmod{p}$$

have one and only one solution c (mod m). We have

$$\left(\frac{c}{m}\right) = \left(\frac{c}{k}\right)\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{a}{k}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \varepsilon_1^2 = 1,$$

$$\left(\frac{c+1}{m}\right) = \left(\frac{c+1}{k}\right)\left(\frac{c+1}{p}\right) = \left(\frac{a+1}{k}\right)\left(\frac{b+1}{p}\right) = \varepsilon_2^2 = 1.$$

[11]) BRAUER, ALFRED: l. c. 3 (a).

[12]) l. c. [8]).

Hence c and $c+1$ are two consecutive numbers for which the Jacobian symbols (mod m) equal 1. It follows that M^{++} is not smaller than the right-hand side of (1).

Conversely, if $\left(\frac{c}{m}\right)=\left(\frac{c+1}{m}\right)=1$, then it is necessary that $\left(\frac{c}{k}\right)=\left(\frac{c}{p}\right)\neq 0$ and $\left(\frac{c+1}{k}\right)=\left(\frac{c+1}{p}\right)\neq 0$. Hence M^{++} is not greater than the right-hand side of (1). This proves (1); the proofs of (2), (3), and (4) are similar.

Theorem 2. *If* $\left(\frac{d}{m}\right)=1$, *then there exist* M^{++} *numbers* c *in a complete system of residues (mod* m*) for which*

$$\left(\frac{c}{m}\right)=\left(\frac{c+d}{m}\right)=1, \tag{5}$$

and if $\left(\frac{d}{m}\right)=-1$, *then there are* M^{--} *numbers* c *for which* (5) *holds.*

Proof. Assume that $\left(\frac{d}{m}\right)=1$. If a is any number such that $\left(\frac{a}{m}\right)=\left(\frac{a+1}{m}\right)=1$, then $\left(\frac{a\,d}{m}\right)=\left(\frac{a\,d+d}{m}\right)=1$. If we reduce $a\,d$ and $a\,d+d$ (mod m), then we obtain a pair of numbers c and $c+d$ satisfying (5). Conversely, if c and $c+d$ are two numbers whose Jacobian symbols equal 1, then the numbers $\frac{c}{d}$ and $\frac{c+d}{d}$ (mod m) are two consecutive numbers whose Jacobian symbols equal 1. Hence to each of the M^{++} pairs of consecutive numbers a and $a+1$ with Jacobian symbols 1 there corresponds a pair c and $c+d$ with difference d and Jacobian symbols 1.

The proof for the case $\left(\frac{d}{m}\right)=-1$ is similar. We have to consider the M^{--} numbers a for which $\left(\frac{a}{m}\right)=\left(\frac{a+1}{m}\right)=-1$.

We now determine M^{++}, M^{--}, M^{+-}, and M^{-+} as functions of the prime factors of m. For this purpose we use V. SCHEMMEL's generalization of Euler's function $\varphi(m)$. SCHEMMEL[13]) defined $\varphi_n(m)$ as the number of sets of n consecutive positive integers each less than m and relatively prime to m, and he obtained

$$\varphi_n(m)=m\prod_{p\,|\,m}\left(1-\frac{n}{p}\right) \tag{6}$$

since $\varphi_n(m)$ is multiplicative and $\varphi_n(p^s)=p^s-n\,p^{s-1}$.

We use the special case $n=2$. If m is odd and squarefree, then it follows from the definition of $\varphi_2(m)$ that

$$\varphi_2(m)=M^{++}+M^{--}+M^{+-}+M^{-+}, \tag{7}$$

Theorem 3. *Assume that* $m=p_1p_2\dots p_r q_1 q_2\dots q_s$ *where the* p_ϱ *are different primes of form* $4n+1$ *and the* q_σ *different primes of form* $4n-1$. *We set*

$$\varphi_2(m)=\prod_{\varrho=1}^{r}(p_\varrho-2)\prod_{\sigma=1}^{s}(q_\sigma-2)=A\,. \tag{8}$$

[13]) SCHEMMEL: Über relative Primzahlen. J. reine angew. Math. **70**, 191—192 (1869).

Then we have

(9) $M^{++} = M^{--} = M^{-+} = M^{+-} + 1 = \frac{1}{4}(A+1)$ if $r \equiv s \equiv 1 \pmod 2$,

(10) $M^{--} = M^{+-} = M^{-+} = M^{++} + 1 = \frac{1}{4}(A+1)$ if $r \equiv 1$ and $s \equiv 0 \pmod 2$,

(11) $M^{++} = M^{--} = M^{-+} = M^{+-} - 1 = \frac{1}{4}(A-1)$ if $r \equiv 0$ and $s \equiv 1 \pmod 2$,

(12) $M^{--} = M^{+-} = M^{-+} = M^{++} - 1 = \frac{1}{4}(A-1)$ if $r \equiv s \equiv 0 \pmod 2$.

Proof. It follows from (7) and (8) that

$$M^{++} + M^{--} + M^{+-} + M^{-+} = A. \tag{13}$$

It is therefore sufficient to prove that three of the numbers on the left-hand side of (13) are equal while the fourth is greater by 1 or smaller by 1 corresponding to the four different cases.

We prove the theorem by induction. For $r = 1$, $s = 0$ and for $r = 0$, $s = 1$ the equations (10) and (11) were proved by Aladov[1]) and by Jacobsthal[2]).

We assume that the theorem is proved for all values of m containing less than $r+s$ different primes. We set

$$p_1 p_2 \dots p_{r-1} q_1 q_2 \dots q_s = k_1, \qquad p_1 p_2 \dots p_r q_1 q_2 \dots q_{s-1} = k_2.$$

Then the theorem is proved for k_1 and k_2. We denote K_1^{--} by g_1. It follows from (9) and (11) that

(14) $K_1^{++} = K_1^{--} = K_1^{-+} = g_1, \qquad K_1^{+-} = g_1 + (-1)^{r-1}$ for $s \equiv 1 \pmod 2$

and from (10) and (12) that

(15) $K_1^{--} = K_1^{+-} = K_1^{-+} = g_1, \qquad K_1^{++} = g_1 + (-1)^{r-1}$ for $s \equiv 0 \pmod 2$.

We have to prove the corresponding results for $m_1 = k_1 p$ and $m_2 = k_2 q$ where p is a prime of form $4n+1$ and q is a prime of form $4n-1$. We set

(16) $P^{--} = P^{+-} = P^{-+} = P^{++} + 1 = h_1, \quad Q^{++} = Q^{--} = Q^{-+} = Q^{+-} - 1 = h_2.$

If s is odd, then it follows from (14), (16), and Theorem 1 that

$$M_1^{+-} = 4 g_1 h_1 - g_1 + (-1)^{r-1} h_1 + (-1)^r,$$

$$M_1^{++} = M_1^{--} = M_1^{-+} = 4 g_1 h_1 - g_1 + (-1)^{r-1} h_1 = M_1^{+-} - (-1)^r.$$

Hence (9) and (11) hold for m_1.

If s is even, then we obtain from (15) and (16)

$$M_1^{--} = M_1^{+-} = M_1^{-+} = 4 g_1 h_1 - g_1 + (-1)^{r-1} h_1 = M_1^{++} - (-1)^r$$

in correspondence with (10) and (12). This proves the theorem for m_1.

The proof for m_2 is similar. If we denote K_2^{--} by g_2, then we obtain, corresponding to (14) and (15),

(17) $K_2^{++} = K_2^{--} = K_2^{-+} = g_2, \quad K_2^{+-} = g_2 + (-1)^r$ for $s - 1 \equiv 1 \pmod 2$,

(18) $K_2^{--} = K_2^{+-} = K_2^{-+} = g_2, \quad K_2^{++} = g_2 + (-1)^r$ for $s - 1 \equiv 0 \pmod 2$.

If s is even, then we obtain from (16) and (17)

$$M_2^{--} = M_2^{+-} = M_2^{-+} = 4g_2h_2 + g_2 + (-1)^r h_2 = M_2^{++} - (-1)^r$$

in correspondence with (10) and (12). If s is odd, then it follows from (16) and (18) that

$$M_2^{++} = M_2^{--} = M_2^{-+} = 4g_2h_2 + g_2 + (-1)^r h_2 = M_2^{+-} - (-1)^r.$$

This proves (9) and (11) for m_2.

In the preceeding paper the following special case of Theorems 3 and 2 was used.

If p and $p+2$ are twin primes and $m = p(p+2)$, then by (9) and (8)

$$M^{++} = M^{--} = \tfrac{1}{4}\{(p-2)p+1\} = \tfrac{1}{4}(p-1)^2. \tag{19}$$

Hence, for every d which is relatively prime to m, there exist $\frac{1}{4}(p-1)^2$ integers c in a complete system of residues (mod m) for which $\left(\frac{c}{m}\right) = \left(\frac{c+d}{m}\right) = 1$.

Theorem 4. *Assume that $m = p_1p_2\ldots p_rq_1q_2\ldots q_s$ where the p_ϱ are different primes of form $4n+1$ and the q_σ different primes of form $4n-1$. We set*

$$B = \varphi(m) - \varphi_2(m). \tag{20}$$

Then we have

$$\begin{cases} M^{0+} = \frac{1}{2}(B+1) = M^{0-} + 1 & \text{if} \quad r \not\equiv s \pmod 2, \\ M^{0+} = \frac{1}{2}(B-1) = M^{0-} - 1 & \text{if} \quad r \equiv s \pmod 2, \\ M^{+0} = \frac{1}{2}(B+1) = M^{-0} + 1 & \text{if} \quad r \equiv 1 \pmod 2, \\ M^{+0} = \frac{1}{2}(B-1) = M^{-0} - 1 & \text{if} \quad r \equiv 0 \pmod 2. \end{cases} \tag{21}$$

Proof. There exist $\frac{1}{2}\varphi(m)$ numbers c_ν in a complete system of residues (mod m) for which $\left(\frac{c_\nu}{m}\right) = 1$. For M^{++} of these numbers the Jacobian symbol $\left(\frac{c_\nu - 1}{m}\right)$ equals 1, for M^{-+} of them this symbol is -1, and for the remaining numbers it is 0. Hence we have

$$M^{0+} = \tfrac{1}{2}\varphi(m) - M^{++} - M^{-+}.$$

Similarly we obtain

$$M^{0-} = \tfrac{1}{2}\varphi(m) - M^{+-} - M^{--},$$

$$M^{+0} = \tfrac{1}{2}\varphi(m) - M^{++} - M^{+-},$$

$$M^{-0} = \tfrac{1}{2}\varphi(m) - M^{-+} - M^{--}.$$

In these equations we substitute the values of M^{++}, M^{--}, M^{+-}, and M^{-+}. Then the equations (21) are obtained.

Theorem 5. *If m is an odd squarefree number, then*

$$M^{00} = m - 2\varphi(m) + \varphi_2(m).$$

Proof. We have m pairs in the closed interval $\{0 \dots m\}$, hence

$$M^{00} = m - M^{++} - M^{--} - M^{+-} - M^{-+} - M^{0+} - M^{0-} - M^{+0} - M^{-0}.$$

It follows from (21) and (20) that

$$M^{0+} + M^{0-} = M^{+0} + M^{-0} = \varphi(m) - \varphi_2(m),$$

hence by (7)

$$M^{00} = m - \varphi_2(m) - 2\{\varphi(m) - \varphi_2(m)\} = m - 2\varphi(m) + \varphi_2(m).$$

Theorem 6. *The statement of Theorem 5 holds for arbitrary integers m.*

Proof. If m is even, then the $\varphi(m)$ numbers c_ν satisfying $0 \leqq c_\nu \leqq m$ and $(c_\nu, m) = 1$ are odd. Hence no two consecutive numbers are relatively prime to m, and the pairs $c_\nu - 1$, c_ν and c_ν, $c_\nu + 1$ are the only ones whose one number is relatively prime to m. Hence

$$M^{00} = m - 2\varphi(m) = m - 2\varphi(m) + \varphi_2(m).$$

Now let $m = p_1 p_2 \dots p_t$ be odd. We set $p_1 p_2 \dots p_t = h$. It follows from Theorem 5 that

$$(22) \qquad H^{00} = h - 2\varphi(h) - \varphi_2(h) = h - 2h \prod_{p \mid h} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + h \prod_{p \mid h} \left(1 - \frac{2}{p}\right).$$

Each closed interval of length h contains H^{00} pairs whose numbers are both not relatively prime to h and to m. Hence by (22)

$$M^{00} = \frac{m}{h} H^{00} = m - 2m \prod_{p \mid h} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + m \prod_{p \mid h} \left(1 - \frac{2}{p}\right) = m - 2\varphi(m) + \varphi_2(m).$$

Let us give a second proof for Theorem 6 using a method of SYLVESTER[14]). We say a pair of consecutive integers has property I if its first number is relatively prime to m and property II if its second number is relatively prime to m. Then the number of pairs in the interval $\{0 \dots m\}$ which have property I is $\varphi(m)$, the number of those with property II equals $\varphi(m)$, too, and the number of pairs having properties I and II is $\varphi_2(m)$. Hence the number of pairs having neither property I nor II is

$$M^{00} = m - \varphi(m) - \varphi(m) + \varphi_2(m) = m - 2\varphi(m) + \varphi_2(m).$$

---

[14]) SYLVESTER, J. J.: Notes sur le théorème de Legendre cité dans une note insérée dans les Comptes Rendus. C. R. Acad. Sci. Paris **96**, 463—465 (1883). = Collected Mathematical Papers **4**, 88—90 (1912). See also PÓLYA, G., u. G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 2. Berlin: Springer 1925. Part VIII, problems 21—27, pp. 119—120, 326—329.

Dept. of Math., University of North Carolina, Chapel Hill, N.C. (U.S.A.)

(Eingegangen am 24. Januar 1953.)

Gaier, D., und A. Peyerimhoff
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 232—242 (1953)

Summierbarkeitsfaktoren bei Eulerschen Reihentransformationen.

Von

Dieter Gaier und Alexander Peyerimhoff.

Gegeben sei eine Matrix A mit den Elementen $a_{n\nu}$ $(n, \nu = 0, 1, \ldots)$. Mit ihrer Hilfe läßt sich ein Summierungsverfahren erklären: Die Reihe $\sum a_n$[1]) mit den Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ heißt A-summierbar zum Wert s, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = s$$

ist. Beim Problem der Summierbarkeitsfaktoren beschäftigt man sich mit der Frage, wie eine Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ komplexer Zahlen beschaffen sein muß, damit sie nach Vorgabe zweier Verfahren A und B jede A-summierbare Reihe $\sum a_\nu$ in eine B-summierbare Reihe $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ überführt. Solche Faktoren nennen wir (A, B)-Summierbarkeitsfaktoren; definiert B speziell ein konvergenzgleiches Verfahren, so heißen die ε_ν Konvergenzfaktoren für das Verfahren A.

Für eine gewisse Klasse von Matrixverfahren A und B ist dieses Problem vollständig gelöst [8][2]). Bei diesen Verfahren wird in der Hauptsache vorausgesetzt, daß sie durch eine Dreiecksmatrix definiert werden und einen „Mittelwertsatz" erfüllen; letzteres bedeutet, daß z.B. für die Matrix A gelten soll

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leq K \max_{0\leq\mu\leq n} \left| \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} s_\nu \right| \quad (0 \leq n \leq m)$$

für jede Folge $\{s_\nu\}$ (A sei Dreiecksmatrix).

Das Euler-Knoppsche Verfahren E_p, erklärt für festes $p > 0$ durch die Dreiecksmatrix E_p mit den Elementen[3])

$$a_{n\nu} = \frac{1}{(p+1)^n} \binom{n}{\nu} p^{n-\nu} \quad (0 \leq \nu \leq n),$$

erfüllt keinen derartigen Mittelwertsatz, und die Frage nach Konvergenzfaktoren für dieses Verfahren wurde auch erst kürzlich angegriffen [13]. Es wurde gezeigt:

Für alle E_p-summierbaren Reihen $\sum a_n$ konvergiert die Reihe $\sum \frac{a_n}{(2p+1)^n}$.

[1]) Für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ schreiben wir stets $\sum a_n$.

[2]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[3]) Vgl. [7], S. 180.

Der Beweis wurde rein arithmetisch geführt, doch kommt man mit funktionentheoretischen Methoden schneller zum Ziel: Die E_p-Summierbarkeit von $\sum a_n$ hat nämlich einerseits die Größenbeschränkung $a_n = o\left((2p+1)^n\right)$ zur Folge, andererseits ist die durch $\sum \frac{a_n}{(2p+1)^n} y^n$ in $|y|<1$ erklärte Funktion noch in $y=1$ regulär, so daß insgesamt nach einem bekannten Satz von Fatou[4]) die Reihe $\sum \frac{a_n}{(2p+1)^n}$ konvergiert.

Diese funktionentheoretische Methode soll nun zum Beweis allgemeinerer Sätze verwandt werden. In § 1 wollen wir uns mit $(C_k E_q, C_k E_p)$-Summierbarkeitsfaktoren beschäftigen, wobei C_k das Cesàrosche Verfahren der Ordnung $k \geqq 0$ bedeutet. Es wird genau die Punktmenge der z-Ebene angegeben werden, für die $\varepsilon_\nu = z^\nu$ Summierbarkeitsfaktoren der angegebenen Art sind. In § 2 soll versucht werden, den oben angegebenen Satz für allgemeine $\mathfrak{E}$-Transformationen im Sinne von Knopp ([9], [12]) zu übertragen. Eine vollständige Lösung ist jedoch hier nicht gelungen.

§ 1. Das Euler-Knoppsche Verfahren.

1.1. Für das folgende ist es zweckmäßig, von der funktionentheoretischen Deutung des E_p-Verfahrens auszugehen. Mit den Bezeichnungen

$$g_p(\omega) = \frac{\omega}{(p+1) - p\omega}, \qquad h_p(\omega) = \frac{(p+1)\omega}{1+p\omega} \quad (p \geqq 0)$$

— so daß also $g_p\left[h_p(\omega)\right] = \omega$ ist — werde für die Reihe $\sum a_n$ mit den Teilsummen s_n zunächst $\sum a_n \left[g_p(\omega)\right]^n = \sum \alpha_n^{(p)} \omega^n$ gebildet. Dann ist

$$\sigma_n^{(p)} = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^{(p)} = \frac{1}{(p+1)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^{n-\nu} s_\nu,$$

so daß also $\sum a_n$ genau dann E_p-summierbar (bzw. $C_k E_p$-summierbar) ist, wenn die Folge $\{\sigma_n^{(p)}\}$ für $n \to \infty$ konvergiert (bzw. C_k-limitierbar ist). Mit $\mathfrak{K}_q$ bezeichnen wir den durch $\left|z - \frac{q}{2q+1}\right| = \frac{q+1}{2q+1}$ gegebenen Kreis. Schließlich sei der durch

$$|z| + \frac{q}{q+1}\left|z - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{p+1}{q+1} \quad (0 \leq p < q) \tag{1.1}$$

definierte Bereich der z-Ebene mit B_{pq} bezeichnet (Fig. 1), und daraus entstehe durch Wegnahme des Punktes $z = -\frac{1}{2q+1}$ die Punktmenge B'_{pq}[5]). Dann gilt

---

[4]) Vgl. [3], S. 389; [15], S. 90.

[5]) Der Bereich B_{pq} kann aufgefaßt werden als das E_p-Summationsgebiet einschließlich Rand einer Funktion, die in $\mathfrak{K}_q$ regulär ist und diesen Kreis zur natürlichen Grenze hat.

Satz 1. *Es sei* $0 \leqq p < q$, $k \geqq 0$. *Ist* $\sum a_n$ *eine beliebige Reihe mit*

$$\alpha_n^{(q)} = o(n^k) \quad (n \to \infty), \tag{1.2}$$

so ist die Reihe $\sum s_n z^n$ *für alle* $z \in B'_{pq}$ $C_k E_p$*-summierbar*[6]).

Beweis. Wird $\sum s_n z^n [g_p(\omega)]^n = \sum \beta_n(z)\,\omega^n$ und $\sum a_n z^n [g_p(\omega)]^n = \sum \alpha_n^{(p)}(z)\,\omega^n$ gesetzt, so ist die C_k-Summierbarkeit von $\sum \beta_n(z)$ festzustellen. Nun gilt aber für kleine $|\omega|$

$$\sum \beta_n(z)\,\omega^n = \frac{1}{1 - z\,g_p(\omega)} \sum a_n z^n [g_p(\omega)]^n = \frac{1}{1 - z\,g_p(\omega)} \sum \alpha_n^{(p)}(z)\,\omega^n \tag{1.3}$$

und

$$\sum \alpha_n^{(p)}(z)\,\omega^n = \sum a_n [z\,g_p(\omega)]^n = \sum \alpha_n^{(q)} [h_q(z\,g_p(\omega))]^n. \tag{1.4}$$

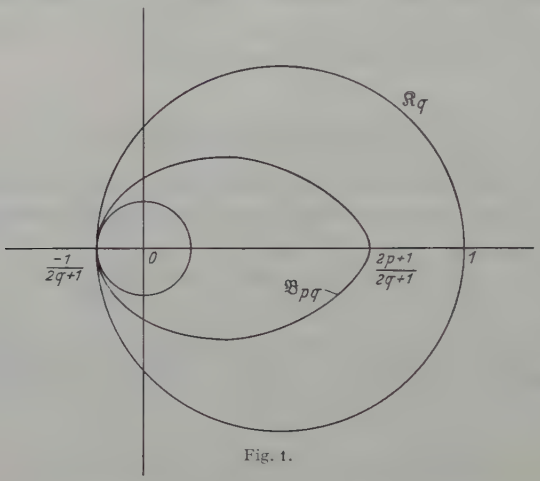

Fig. 1.

Daraus folgt nach einfacher Rechnung durch Koeffizientenvergleich der Entwicklungen nach ω

$$\beta_n(z) = \frac{z}{p+z} \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu^{(p)}(z) \left(\frac{p+z}{p+1}\right)^{n-\nu} + \alpha_n^{(p)}(z) \quad (n \geqq 1) \tag{1.5}$$

und

$$\begin{cases} \alpha_0^{(p)}(z) = \alpha_0^{(q)}, \\ \alpha_n^{(p)}(z) = \dfrac{1}{n(p+1)^n} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^{(q)} \binom{n}{\nu} \nu\,[z(q+1)]^\nu (p - q\,z)^{n-\nu} \quad (n \geqq 1). \end{cases} \tag{1.6}$$

Für sämtliche Punkte z aus B_{pq} gilt nun wegen (1.1)

$$|p - q\,z| \leq (p+1) - (q+1)\,|z|\,.$$

[6]) Wesentlich ist hier nur die Aussage für Randpunkte von B'_{pq}, da sie für innere Punkte aus bekannten Sätzen folgt [z liegt dann im Innern des E_p-Sterns von $g(z) = \sum s_n z^n$].

Daher folgt aus (1.6) für $n \geq 1$

$$(1.7)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\alpha_n^{(p)}(z)}{n^k}\right| \\ \leq \dfrac{1}{n^{k+1}(p+1)^n} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} o(1) \binom{n}{\nu} \nu^{k+1} [|z|(q+1)]^\nu [(p+1)-(q+1)|z|]^{n-\nu} \end{cases}$$

wegen (1.2). Die in (1.7) vermittelnde Matrix mit den Elementen $c_{n\nu}$ hat aber, wie man leicht feststellt, einerseits beschränkte Zeilennormen, und andererseits ist $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n\nu} = 0$ für $\nu = 0, 1, \ldots$, weshalb

$$(1.8)\qquad \alpha_n^{(p)}(z) = o(n^k)$$

ist für $n \to \infty$ und jedes feste $z \in B_{pq}$. Benützt man dies zur Abschätzung von $\beta_n(z)$ in (1.5), so folgt auf ähnliche Weise

$$(1.9)\qquad \beta_n(z) = o(n^k)$$

für $n \to \infty$ und jedes feste $z \in B_{pq}$, denn für diese z ist nach (1.1)

$$|z| \leq \frac{p+1}{q+1} < 1 \quad \text{und daher} \quad \left|\frac{p+z}{p+1}\right| < 1.$$

Schließlich folgt aus der Relation

$$\sum a_n [g_q(\omega)]^n = \sum \alpha_n^{(q)} \omega^n$$

und aus (1.2), daß $f(z) = \sum a_n z^n$ für $|h_q(z)| < 1$, d.h. im Innern des in Fig. 1 gezeichneten Kreises $\mathfrak{K}_q$ regulär ist. Das hat zur Folge, daß die wegen (1.9) für $|\omega| < 1$ reguläre Funktion

$$f_1(\omega) = \sum \beta_n(z)\, \omega^n = \frac{1}{1 - z\, g_p(\omega)} \sum a_n [z\, g_p(\omega)]^n = \frac{f(z\, g_p(\omega))}{1 - z\, g_p(\omega)}$$

für jedes feste $z \in B'_{pq}$ auch im Punkte $\omega = 1$ regulär ist. Es ist nämlich $g_p(1) = 1$ und $g_p(\omega)$ ist für $\omega = 1$ regulär. Ferner liegt jedes $z \in B'_{pq}$ im Innern von $\mathfrak{K}_q$, denn nach (1.1) gilt für diese z

$$\begin{aligned} \frac{p+1}{q+1} &\geq |z| + \frac{q}{q+1} \left| - \frac{q+1}{q} z + \left(\frac{2q+1}{q} z - \frac{p}{q} \right) \right| \\ &\geq |z| + \left| \frac{2q+1}{q} z - \frac{p}{q} \right| \frac{q}{q+1} - |z|, \end{aligned}$$

also

$$(1.10)\qquad \left| z - \frac{p}{2q+1} \right| \leq \frac{p+1}{2q+1}.$$

Eine einfache Überlegung zeigt, daß alle Punkte der Kreisscheibe (1.10) abgesehen vom Punkt $z = -\dfrac{1}{2q+1}$, im Innern von $\mathfrak{K}_q$ liegen.

Damit ist aber der Satz von FATOU in seiner Verallgemeinerung von M. RIESZ ([15], S. 93) auf die Reihe $\sum \beta_n(z)\, \omega^n$ anwendbar. Nach ihm genügt

die Regularität von $\sum \beta_n(z)\,\omega^n$ in $\omega = 1$ und (1.9) für die C_k-Summierbarkeit dieser Reihe im Punkt $\omega = 1$. Dies war aber zu zeigen[7]).

1.2. Der Satz 1 wird es uns gestatten, einen Satz über $(C_k E_q, C_k E_p)$-Summierbarkeitsfaktoren der Form $\varepsilon_\nu = z^\nu$ anzugeben. Wir schicken zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Für jede $C_k E_p$-summierbare Reihe $\sum a_n$ ist $C_k E_p - \lim a_n = 0$ $(k \geqq 0, p \geqq 0)$.*

Beweis. Offenbar genügt es, wenn wir zeigen, daß aus der $C_k E_p$-Summierbarkeit von $\sum a_n$ die von $0 + a_0 + a_1 + \cdots$ zu derselben Summe folgt.

Die $C_k E_p$-transformierte Folge $\{\tau_n\}$ einer Reihe $\sum a_n$ wird gegeben durch

$$\sum a_n [g_p(\omega)]^n = (1-\omega)^{k+1} \sum \tau_n \binom{n+k}{n} \omega^n.$$

Daraus folgt, daß die $C_k E_p$-transformierte Folge $\{\tilde{\tau}_n\}$ der Reihe $0 + a_0 + a_1 + \cdots$ gegeben wird durch

$$\tilde{\tau}_n = \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \tau_\nu \binom{\nu+k}{\nu} b_{n-\nu} \qquad \left(g_p(\omega) = \sum b_n \omega^n\right),$$

und dies ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, eine permanente Transformation.

Hilfssatz 2. *Ist die Reihe $\sum s_n z^n$ $C_k E_p$-summierbar $(k \geqq 0, p \geqq 0)$, so auch die Reihe $\sum a_n z^n$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist $C_k E_p - \lim s_n z^n = 0$, woraus wegen

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = z(s_n z^n) + (1-z) \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu z^\nu$$

die Behauptung folgt.

Wir kommen nun zu dem angekündigten

Satz 2. *Es sei $0 \leqq p < q$, $k \geqq 0$. Dann ist B'_{pq} genau die Punktmenge der z-Werte, für die $\varepsilon_\nu = z^\nu$ $(C_k E_q, C_k E_p)$-Summierbarkeitsfaktoren sind.*

Das heißt also, daß $\sum a_n z^n$ (und, wie sich ergeben wird, auch $\sum s_n z^n$) stets $C_k E_p$-summierbar ist für jede $C_k E_q$-summierbare Reihe $\sum a_n$, falls z in B'_{pq} liegt; ist $z \overline{\in} B'_{pq}$, so ist dies nicht mehr richtig.

Beweis. Auf Grund der $C_k E_q$-Summierbarkeit von $\sum a_n$ zu einem Wert a ist

$$\sigma_n^{(q)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} \binom{\nu+k}{\nu} (a + o(1)) = a + o(n^k),$$

also $\alpha_n^{(q)} = o(n^k)$, so daß nach Satz 1 die Reihe $\sum s_n z^n$ für alle $z \in B'_{pq}$ $C_k E_p$-summierbar ist. Nach Hilfssatz 2 ist auch $\sum a_n z^n$ $C_k E_p$-summierbar.

[7]) Mit der hier verwendeten Methode läßt sich folgende Erweiterung des FATOUschen Satzes beweisen: *Die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ ist in jedem regulären Randpunkt z ihres E_p-Summationssternes $C_k E_p$-summierbar, für den $A_n^{(p)}(z) - o(n^k)$ ist $(k \geqq 0, p \geqq 0)$.* [Dabei bedeutet $\{A_n^{(p)}(z)\}$ die E_p-transformierte Folge der Folge $\{a_n z^n\}$.] Für $k = 0$ vgl. [4]; $k = p = 0$ liefert den FATOUschen Satz.

Andererseits sind $\varepsilon_\nu = z^\nu$ für $z \in B_{pq}$ sicher keine $(C_k E_q, C_k E_p)$-Faktoren. Denn ist z.B. $\sum a_n z^n$ für $z = 1$ $C_k E_q$-summierbar und hat die durch $\sum a_n z^n$ erklärte Funktion den Kreis $\mathfrak{K}_q$ als natürliche Grenze[8]), so ist diese Reihe $\sum a_n z^n$ außerhalb ihres E_p-Summationssternes, d.h. in diesem Falle außerhalb B_{pq}, sicher nicht $C_k E_p$-summierbar.

Schließlich sind auch die Zahlen $\varepsilon_\nu = z^\nu$ für $z = -\frac{1}{2q+1}$ keine $(C_k E_q, C_k E_p)$-Faktoren. Dazu betrachten wir die Reihe $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n (2q+1)^n}{n+1}$. Sie ist E_q-summierbar; denn einerseits ist $E_q - \lim a_n = 0$ ([13], S. 291), und andererseits ist die in der Umgebung von $z = 0$ durch $\varphi(z) = \sum \frac{(-1)^n (2q+1)^n}{n+1} z^n$ erklärte Funktion in $\mathfrak{K}_q$ und im Punkte $z = 1$ regulär, da deren einzige endliche Singularität bei $z = -\frac{1}{2q+1}$ liegt. Nach dem in [7]) zitierten Satz $(k = 0)$ ist $\sum a_n$ daher E_q-summierbar. Wird aber $\sum a_n$ mit den Faktoren $\varepsilon_n = \left(\frac{-1}{2q+1}\right)^n$ versehen, so divergiert $\sum a_n \varepsilon_n$ gegen $+\infty$, kann also nicht $C_k E_p$-summierbar sein. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir bemerken noch, daß im Spezialfall $p = k = 0$ aus der E_q-Summierbarkeit der Reihe $\sum a_n$ die Konvergenz von $\sum \frac{s_n}{(2q+1)^n} \zeta^n$ und $\sum \frac{a_n}{(2q+1)^n} \zeta^n$ für $\zeta = e^{i\varphi}, \varphi \neq \pi$ folgt. Für $\varphi = 0$ ist dieser Sachverhalt bekannt (vgl. [13], S. 289 und 291).

Satz 3. *Es sei $0 \leqq p < q$, $k \geqq 0$. Ist $\sum a_n$ eine beliebige Reihe und gilt für ihre E_q-Transformation*

$$\sigma_n^{(q)} \cong A \cdot n^k \qquad (n \to \infty), \tag{1.11}$$

so sind die Reihen $\sum a_n z^n$ und $\sum s_n z^n$ für alle $z \in B'_{pq}$ $C_k E_p$-summierbar.

Beweis. Die Bedingung (1.11) hat $\alpha_n^{(q)} = o(n^k)$ zur Folge, und Satz 1, zusammen mit Hilfssatz 2, liefert das Gewünschte.

§ 2. Allgemeine Eulersche Reihentransformationen.

2.1. In diesem Paragraphen wollen wir uns damit beschäftigen, den in der Einleitung genannten Satz auf allgemeine $\mathfrak{E}$-Transformationen zu übertragen. Die Definition des $\mathfrak{E}$-Verfahrens wollen wir, etwas allgemeiner als bei Knopp [9] angegeben, folgendermaßen fassen: Eine in $|\omega| < 1$ reguläre Funktion $z = g(\omega)$ bilde $|\omega| < 1$ umkehrbar eindeutig auf ein von einer Jordan-Kurve $\mathfrak{C}$ berandetes, die Strecke $0 \leqq z < 1$ enthaltendes Gebiet $\mathfrak{G}$ in $|z| < 1$ ab, wobei $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ sei[9]); die in $\mathfrak{G}$ erklärte Umkehrfunktion zu $z = g(\omega)$ sei mit $\omega = h(z)$ bezeichnet.

[8]) Man beachte, daß $\sum a_n [g_q(\omega)]^n = \sum \alpha_n^{(q)} \omega^n$ gilt und daher diese Forderungen die C_k-Summierbarkeit von $\sum \alpha_n^{(q)}$ und die Nichtfortsetzbarkeit von $\sum \alpha_n^{(q)} \omega^n$ über $|\omega| = 1$ hinaus bedeuten. Dies kann z.B. erreicht werden, indem man für $\sum \alpha_n^{(q)}$ eine konvergente Reihe mit großen Lücken nimmt.

[9]) Die Funktion $g(\omega)$ ist in $|\omega| \leqq 1$ stetig (vgl. z.B. [2], S. 31), daher kann von $g(\omega)$ mit $|\omega| = 1$ gesprochen werden.

Mit Hilfe der Funktion $g(\omega)$ bilde man

$$\sum a_n z^n = \sum a_n [g(\omega)]^n = \sum \alpha_n \omega^n;$$

die Reihe $\sum a_n$ heißt dann $\mathfrak{E}$-summierbar (bzw. $|\mathfrak{E}|$-summierbar), wenn $\sum \alpha_n$ konvergiert (bzw. absolut konvergiert). Ist dies der Fall, so ist $\sum \alpha_n \omega^n$ in $|\omega| < 1$ regulär, und durch $\sum a_n z^n$ wird eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion $f(z)$ erklärt. Setzt man daher

$$d = \operatorname*{Min}_{|\omega|=1} |g(\omega)| < 1^{10}),$$

so ist $\sum a_n z^n$ sicher in $|z| < d$ und im Punkt $z = d$ regulär, und nach dem FATOUschen Satz konvergiert also $\sum a_n d^n$, wenn die a_n der Bedingung

$$a_n = o\left(\frac{1}{d^n}\right) \tag{2.1}$$

genügen. Es ergibt sich hiermit

Satz 4. *Für alle $\mathfrak{E}$-summierbaren Reihen $\sum a_n$ konvergiert die Reihe $\sum a_n d^n$, sofern (2.1) gilt.*

Ob (2.1) für alle $\mathfrak{E}$-summierbaren Reihen $\sum a_n$ allgemein richtig ist, konnte nicht entschieden werden. Im folgenden wird es sich darum handeln, einige hinreichende Bedingungen für die Richtigkeit von (2.1) abzuleiten.

2.2. Die erste Bedingung, die (2.1) zur Folge hat, ist unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion $g(\omega)$.

Satz 5. *Für alle $|\mathfrak{E}|$-summierbaren Reihen $\sum a_n$ gilt* (2.1).

Beweis. Konvergiert $\sum \alpha_n$ absolut, so ist $\sum \alpha_n \omega^n$ in $|\omega| < 1$ beschränkt, d.h. $f(z) = \sum a_n z^n$ ist in $\mathfrak{G}$ und daher insbesondere in $|z| < d$ beschränkt. Daraus folgt aber $a_n d^n \to 0$ für $n \to \infty$, da $\sum |a_n|^2 d^{2n}$ konvergiert.

In den Sätzen 6 und 7 werden Klassen von $\mathfrak{E}$-Verfahren angegeben, für die aus der $\mathfrak{E}$-Summierbarkeit von $\sum a_n$ die Gültigkeit von (2.1) folgt.

Satz 6. *Es gilt* (2.1) *für jede $\mathfrak{E}$-summierbare Reihe $\sum a_n$, falls die zu $\mathfrak{E}$ gehörige Kurve $\mathfrak{C}$ nur einen Punkt z_0 mit $|z| = d$ gemein hat und dort diesen Kreis von erster Ordnung berührt.*

Beweis. Für $|z| < d$ gilt die Identität

$$\sum a_n z^n = \sum \alpha_n [h(z)]^n, \tag{2.2}$$

und daher berechnet sich $a_n d^n$ aus den α_n gemäß

$$a_n d^n = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n\nu} \alpha_\nu \tag{2.3}$$

mit

$$\alpha_{n\nu} = \frac{d^n}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{[h(z)]^\nu}{z^{n+1}} dz \qquad (n, \nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

---

[10]) Von der identischen Transformation mit $g(\omega) = \omega$, die den Fall der Konvergenz liefert, wollen wir hier absehen. Dann ist stets $d < 1$; denn ist $d = 1$, d.h. fällt $\mathfrak{C}$ mit $|z| = 1$ zusammen, so ist $g(\omega) = \omega$, wie man mit Hilfe des SCHWARZschen Lemmas leicht einsieht.

Für die Matrix $(\alpha_{n\nu})$ ist nun die Spaltenbedingung $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n\nu} = 0$ für jedes feste ν erfüllt, da $[h(dz)]^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_{n\nu} z^n$ eine in $|z|<1$ beschränkte Funktion ist. Um die Zeilennormen $Z_n = \sum_{\nu=0}^{n} |\alpha_{n\nu}|$ zu untersuchen, betrachten wir

$$|\alpha_{n\nu}| \leq \frac{d^n}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}}. \tag{2.5}$$

Auf Grund der Annahme über das Verhalten von $\mathfrak{C}$ in der Umgebung von z_0 gibt es ein $\vartheta > 0$, so daß für sämtliche z auf $\mathfrak{C}$, die einer gewissen Umgebung von z_0 angehören,

$$|z| \geq d + |z - z_0|\vartheta$$

gilt. Für diesen Teil $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{C}$ folgt daher nach einfacher Rechnung (vgl. z. B. [*10*], S. 65)

$$\frac{d^n}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}_1} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Auf dem restlichen Teil von $\mathfrak{C}$ gilt $|z| \geq d' > d$, also sicher

$$\frac{d^n}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_1} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty),$$

insgesamt also mit einer festen Konstanten K

$$|\alpha_{n\nu}| \leq \frac{K}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ \nu = 0, 1, \ldots).$$

Daher ist für $n \geq 1$ stets $Z_n = \sum_{\nu=0}^{n} |\alpha_{n\nu}| \leq 2K$; die Matrix $(\alpha_{n\nu})$ transformiert demnach jede Nullfolge $\{\alpha_\nu\}$ wieder in eine Nullfolge, so daß (2.1) erfüllt ist.

Mit Hilfe der zum Beweis von Satz 6 angestellten Überlegungen sieht man leicht, daß die $\mathfrak{E}$-Summierbarkeit von $\sum a_n$ in allen Fällen

$$a_n = o\left(\frac{n}{d^n}\right) \qquad (n \to \infty) \tag{2.6}$$

zur Folge hat. Das in (2.5) auftretende Integral ist nämlich sicher $O(1/d^n)$, so daß man für die Zeilennormen Z_n der in (2.3) vermittelnden Matrix $(\alpha_{n\nu})$ stets $Z_n = O(n)$ erhält. Außerdem ist wieder die Spaltenbedingung für $(\alpha_{n\nu})$ erfüllt, so daß die Nullfolge $\{\alpha_n\}$ in die Folge $\{a_n d^n\}$ transformiert wird, von der jedenfalls $a_n d^n = o(n)$ für $n \to \infty$ gilt.

Schließlich bemerken wir, daß statt (2.6) schärfer

$$a_n = o\left(\frac{\sqrt{n}}{d^n}\right) \qquad (n \to \infty) \tag{2.7}$$

gilt, wenn $\mathfrak{C}$ nur einen Punkt z_0 mit $|z| = d$ gemeinsam hat und diesen Kreis dort von 2. Ordnung berührt. Zum Beweis dieser Tatsache gehe man wie

im Anschluß an Satz 6 vor, wobei lediglich die Abschätzung des Integrals in (2.5) etwas zu modifizieren ist (vgl. [5], S. 328).

Aus der Beziehung (2.6) folgt, daß $\sum a_n d^n$ für jede $\mathfrak{E}$-summierbare Reihe $\sum a_n$ sicher C_1-summierbar ist, und aus (2.7) folgt die $C_{\frac{1}{2}}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum a_n d^n$. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 4.

Satz 7. *Es gilt* (2.1) *für jede* $\mathfrak{E}$*-summierbare Reihe* $\sum a_n$, *falls die zu* $\mathfrak{E}$ *gehörige Umkehrfunktion* $\omega = h(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu$ *reelle Entwicklungskoeffizienten* γ_ν *mit alternierenden Vorzeichen*[11]) *besitzt.*

Beweis. Wir stellen zunächst fest, daß im Falle reeller γ_ν die Kurve $\mathfrak{E}$ die x-Achse ($z = x + iy$) in genau zwei Punkten trifft, nämlich in den Punkten $z = 1$ und $z = z_0 < 0$. Denn reellen Punkten der Kurve müssen bei der Abbildung $\omega = h(z)$ reelle Punkte von $|\omega| = 1$ entsprechen, d.h. die Punkte $\omega = \pm 1$. Die Strecke $0 \leqq z < 1$ geht wegen $h(1) = 1$ und $h(0) = 0$ in die Strecke $0 \leqq \omega < 1$ über, so daß $g(-1) = z_0 < 0$ ist.

Weiter ist $\gamma_1 > 0$. Der Fall $\gamma_1 = 0$ kann nämlich wegen der Schlichtheit von $h(z)$ in $\mathfrak{E}$ nicht eintreten. Außerdem hätte $\gamma_1 < 0$ zur Folge, daß das Bild von $0 \leqq z < 1$ bei der Abbildung durch $\omega = h(z)$ auch Punkte mit $\omega < 0$ enthielte, was wiederum falsch ist, da $0 \leqq z < 1$ in die Strecke $0 \leqq \omega < 1$ übergeführt wird.

Es ist somit $\gamma_\nu = (-1)^{\nu+1} |\gamma_\nu|$ für $\nu = 1, 2, \ldots$. Wir zeigen nun, daß $|z_0| = -z_0 = d$ ist. Wäre nämlich z_0' ein Punkt von $\mathfrak{E}$ mit $d = |z_0'| < |z_0|$, so wäre

$$|h(z_0')| = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu z_0'^\nu \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu| d^\nu = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu (-d)^\nu = -h(-d) < -h(z_0) = 1.$$

Dies ist unmöglich, weil z_0' ein Punkt von $\mathfrak{E}$ sein sollte, für den also $|h(z_0')| = 1$ sein müßte.

Um nun (2.1) zu beweisen, gehen wir von (2.3) und (2.4) aus. Setzt man

$$\big(-h(-dz)\big)^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \delta_n^{(\nu)} z^n, \qquad \text{also} \qquad \big(h(z)\big)^\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \delta_n^{(\nu)} (-1)^{n-\nu} \left(\frac{z}{d}\right)^n,$$

so ist

$$\delta_n^{(\nu)} \geqq 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(1)} = -h(-d) = 1$$

und

$$\alpha_{n\nu} = d^n \delta_n^{(\nu)} (-1)^{n-\nu} \frac{1}{d^n} = (-1)^{n-\nu} \delta_n^{(\nu)}.$$

Zunächst ist $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n\nu} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-\nu} \delta_n^{(\nu)} = 0$ für jedes feste ν, da $\big(-h(-dz)\big)^\nu$ in $|z| < 1$ beschränkt ist. Setzt man weiter

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_{n\nu}| = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_n^{(\nu)}, \tag{2.8}$$

[11]) Das heißt es ist $\gamma_\nu = (-1)^\nu |\gamma_\nu|$ oder $\gamma_\nu = (-1)^{\nu+1} |\gamma_\nu|$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

so ist nur noch die Beschränktheit der Folge $\{\sigma_n\}$ darzutun. Dazu benützen wir die gleich zu beweisende Rekursionsformel

$$(2.9) \qquad \sigma_n = \delta_1^{(1)}\sigma_{n-1} + \delta_2^{(1)}\sigma_{n-2} + \cdots + \delta_{n-1}^{(1)}\sigma_1 + \delta_n^{(1)} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

und beachten, daß $\sigma_1 = \delta_1^{(1)} \leqq 1$ ist. Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(1)} = 1$ folgt aus (2.9) durch Induktion $\sigma_n \leqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Es bleibt also noch (2.9) zu beweisen. Wegen (2.8) ist

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n z^n = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-h(-dz)\right)^{\nu} = \frac{1}{1 + h(-dz)}$$

und somit

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n z^n\right)\left(-h(-dz)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n z^n,$$

woraus (2.9) unmittelbar abgelesen werden kann[12]).

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die in Satz 7 auftretende Bedingung für $h(z)$ für viele bekannte $\mathfrak{E}$-Verfahren erfüllt ist. So ist z.B. bei dem in § 1 untersuchten E_p-Verfahren $(p > 0)$

$$h(z) = \frac{(p+1)z}{1+pz} = (p+1)z \sum_{\nu=0}^{\infty} (-pz)^{\nu},$$

und ein von Mersman [11] eingeführtes Verfahren gehört zu

$$h(z) = \frac{4z}{(1+z)^2} = 4z \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(-z)^{\nu},$$

wie Scott und Wall gezeigt haben ([16], S. 270). Ein von Rey Pastor [14] eingeführtes Verfahren gehört (vgl. Amerio [1]) zu

$$h(z) = z\,e^{1-z} = e \cdot z \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{\nu}}{\nu!}.$$

---

[12]) Den Sätzen 6 und 7 liegt folgendes allgemeine Prinzip zugrunde, auf das uns Herr Jurkat freundlicherweise aufmerksam machte: Bei den Beweisen kommt es in beiden Fällen darauf an, daß gewisse Zeilennormen beschränkt sind, ganz entsprechend wie bei Permanenzsätzen. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß unter zusätzlichen Voraussetzungen genau dann aus $\alpha_n \to 0$ stets $a_n d^n \to 0$ folgt, wenn die durch

$$g_1(\omega) = \frac{h(\delta\omega)}{h(\delta)} \quad \text{mit} \quad \delta = g(\xi), \qquad |g(\xi)| = \operatorname*{Min}_{|\omega|=1} |g(\omega)| = d$$

gegebene Reihentransformation $\mathfrak{E}_1$ permanent ist. Der Beweis beruht auf der Annahme, daß die Funktionen

$$\frac{1-\omega}{1-g_1(\omega)} \quad \text{und} \quad \frac{1-g_1(\omega)}{1-\omega}$$

für $\omega = 1$ absolut konvergente Potenzreihen in ω besitzen. Mit Hilfe der bekannten Permanenzbedingungen von Gronwall [6] und Perron [12] für allgemeine Euler-Verfahren kann man wieder zu den Sätzen 6 und 7 (in etwas abgeschwächter Form) gelangen.

Literatur.

[1] Amerio, L.: Un metodo di sommazione per le serie di potenze e sua applicazione alla transformazione di Laplace. Ann. Scuola norm. sup. Pisa (2) **8**, 167—180 (1939). — [2] Bieberbach, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II. Leipzig 1931. — [3] Fatou, P.: Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta math. **30**, 335—400 (1906). — [4] Gaier, D.: Complex Tauberian theorems for power series. Erscheint demnächst in den Trans. Amer. Math. Soc. — [5] Gaier, D.: Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Math. Z. **56**, 326—334 (1952). — [6] Gronwall, T. H.: Summation of series and conformal mapping. Ann. of Math. (2) **33**, 101—117 (1932). — [7] Hardy, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [8] Jurkat, W., u. A. Peyerimhoff: Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **58**, 186—203 (1953). — [9] Knopp, K.: Über Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern durch Anwendung der Eulerschen Reihentransformation. Acta math. **47**, 313—335 (1926). — [10] Landau, E.: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1929. — [11] Mersman, W. A.: A new summation method for divergent series. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 667—673 (1938). — [12] Perron, O.: Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation. Math. Z. **18**, 157—172 (1923). — [13] Peyerimhoff, A.: Konvergenzfaktoren beim Euler-Knoppschen Limitierungsverfahren. Math. Z. **55**, 288—291 (1952). — [14] Rey Pastor, J.: Un método de sumación de series. Rend. Circ. Mat. Palermo **55**, 450—455 (1931). — [15] Riesz, M.: Über einen Satz des Herrn Fatou. J. reine angew. Math. **140**, 89—99 (1911). — [16] Scott, W. T., and H. S. Wall: The transformation of series and sequences. Trans. Amer. Math. Soc. **51**, 255—279 (1942).

Stuttgart, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule.

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 10. Januar 1953.)

Huppert, B.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 243—264 (1953)

Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen.

Von
Bertram Huppert.

Einleitung.

Einige in den letzten Jahren erschienene Arbeiten beschäftigen sich mit endlichen Gruppen $\mathfrak{G}$, welche sich als Produkt von paarweise vertauschbaren Untergruppen darstellen lassen. (Unter dem Produkt von zwei Untergruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ hat man dabei die Menge aller Elemente HK mit $H \in \mathfrak{H}$ und $K \in \mathfrak{K}$ zu verstehen. Entsprechendes gilt für mehr als zwei Faktoren.) Eine solche Zerlegung bezeichnet man als eine Faktorisierung der Gruppe. Der einfachste Fall tritt dann ein, wenn $\mathfrak{G}$ sich als Produkt von m paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen endlicher Ordnung schreiben läßt. Zur einfachen Verständigung sei eine solche Gruppe als Z_m-zerlegbar bezeichnet. Die Z_1-zerlegbaren Gruppen sind also genau die zyklischen Gruppen endlicher Ordnung. Den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit bilden die Z_2-zerlegbaren Gruppen. (Übrigens ist die Zahl m zu einer vorgelegten Z_m-zerlegbaren Gruppe keineswegs eindeutig bestimmt; die zyklische Gruppe der Ordnung 6 ist Z_1-zerlegbar und Z_2-zerlegbar. Jede Z_1-zerlegbare Gruppe $\{A\}$ ist auch Z_2-zerlegbar vermöge $\{A\} = \{A\}\{E\}$.)

Zunächst die bisherigen Ergebnisse über Z_m-zerlegbare Gruppen: Rédei (s. Literaturverzeichnis [11]) betrachtete Produkte einer zyklischen Gruppe endlicher Ordnung mit einer zyklischen Gruppe unendlicher Ordnung. Sein Ziel war die Bestimmung der Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$, welche in der Vertauschungsrelation

$$A^x B^y = B^{f(x,y)} A^{g(x,y)}$$

auftreten. Die Rédeische Arbeit hat mit der vorliegenden Untersuchung keine Berührungspunkte. Itô [6] bewies als Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes die Auflösbarkeit Z_2-zerlegbarer Gruppen. Wielandt [18] dehnte dieses Resultat auf Z_m-zerlegbare Gruppen aus. Weiter zeigte er, daß die Sylowgruppe zum größten Primteiler der Gruppenordnung in einer Z_m-zerlegbaren Gruppe stets invariant ist und bewies ganz allgemeine Sätze über die Faktorisierung der Sylowgruppen und Sylowkomplemente (s. P. Hall [2]) von faktorisierbaren Gruppen. An diese Ergebnisse knüpft die vorliegende Arbeit an.

In Kap. I werden die Z_2-zerlegbaren p-Gruppen studiert, welche nach Wielandt [18] als Sylowgruppen der allgemeinen Z_2-zerlegbaren Gruppen auftreten. Diese p-Gruppen lassen sich für ungerade Primzahlen p sehr einfach

beschreiben: Sie besitzen einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe. Im Falle $p=2$ liegen die Verhältnisse schwieriger. Hier konnten wir nicht zu abschließenden Ergebnissen gelangen. Bemerkenswert ist die Charakterisierung der Z_2-zerlegbaren p-Gruppen für $p>3$ durch die Anzahl ihrer Elemente der Ordnung p.

§ 4 in Kap. II enthält neue Herleitungen der Sätze von Itô und Wielandt. Insbesondere ergibt sich als Verschärfung Wielandtscher Ergebnisse folgendes Resultat: Jede Hauptreihe einer Z_2-zerlegbaren Gruppe ist primzahlstufig, d.h. jede Z_2-zerlegbare Gruppe ist überauflösbar (s. unter „Bezeichnungen"). Daraus folgen interessante Eigenschaften der Z_2-zerlegbaren Gruppen: Die Kommutatorgruppe ist nilpotent; jede maximale Untergruppe hat Primzahlindex; jede irreduzible Darstellung läßt sich auf monomiale Gestalt transformieren. § 4 ist von Kap. I fast unabhängig. Deshalb lassen sich die Ergebnisse von § 4 auf Z_m-zerlegbare Gruppen ausdehnen, was in § 6 durchgeführt wird. In § 5 wird die Kenntnis der Sylowgruppen Z_2-zerlegbarer Gruppen zu ungeraden Primzahlen ausgenutzt. So kommt man zu der Aussage $(\mathfrak{G}'')=2^n$. Eine weitergehende Theorie der Z_2-zerlegbaren 2-Gruppen würde noch schärfere Sätze liefern.

Bezeichnungen. $(\mathfrak{K})$ = Anzahl der Elemente des Komplexes $\mathfrak{K}$; ist speziell $\mathfrak{K}$ eine Gruppe, so ist $(\mathfrak{K})$ die Ordnung von $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{G}'$ = Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ = Zentrum von $\mathfrak{G}$. $\Phi(\mathfrak{G})$ = Frattinigruppe von $\mathfrak{G}$ = Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{U}<\mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$; z.B. $\mathfrak{G}<\mathfrak{G}$. $\mathfrak{U}\lhd\mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{E}$ = Einheitsgruppe, welche nur aus dem einzigen Element E besteht. $\mathfrak{G}$ heißt überauflösbar, wenn es eine Hauptreihe

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_0\rhd\mathfrak{N}_1\rhd\cdots\qquad\rhd\mathfrak{N}_j=\mathfrak{E}\qquad(\mathfrak{N}_i\lhd\mathfrak{G})$$

gibt, deren Faktorgruppen $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ Primzahlordnung haben; vgl. Zappa [*19*]. Wir setzen $S^{-1}AS=A^S$ und $(A,B)=ABA^{-1}B^{-1}$. Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ Teilkomplexe einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so sei $(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$ die von allen Kommutatoren (U,V) mit $U\in\mathfrak{U}$ und $V\in\mathfrak{V}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Speziell für die Theorie der Z_2-zerlegbaren p-Gruppen in Kap. I führen wir noch ein (Bezeichnungen gemäß P. Hall [*3*]):

$\mathfrak{G}^{[i]}=i$-tes Glied der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}^{[i+1]}=(\mathfrak{G}^{[i]},\mathfrak{G})$. $\mathfrak{Z}_i=i$-tes Glied der aufsteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{Z}_{i-1}=\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{i-1})$. $\mathfrak{O}_i(\mathfrak{G})$ = Erzeugnis aller X^{p^i} mit $X\in\mathfrak{G}$; $\Phi(\mathfrak{G})=\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})\cdot\mathfrak{G}'$. $\Omega_i(\mathfrak{G})$ = Erzeugnis aller $X\in\mathfrak{G}$ mit $X^{p^i}=E$. $d(\mathfrak{G})$ = minimale Erzeugendenzahl von $\mathfrak{G}$; $(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}))=p^{d(\mathfrak{G})}$. $c(\mathfrak{G})$ = Klasse von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}^{[c+1]}=\mathfrak{E}$, $\mathfrak{Z}_c=\mathfrak{G}$. $\omega(\mathfrak{G})$ = Hallsche Basiszahl; $(\mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}))=p^{\omega(\mathfrak{G})}$. $p^{\mu(\mathfrak{G})}$ = kleinstes gemeinsames Vielfaches der Ordnungen der Elemente von $\mathfrak{G}$.

Kap. I. Z_2-zerlegbare p-Gruppen.

Generelle Voraussetzung dieses Kapitels:

$$\mathfrak{G}=\{A\}\{B\},\qquad(\mathfrak{G})=p^n,\qquad(\{A\})=p^a,\qquad(\{B\})=p^b.$$

§ 1. Allgemeine Sätze über Z_2-zerlegbare p-Gruppen.

Satz 1. *Jede Faktorgruppe einer Z_2-zerlegbaren Gruppe ist Z_2-zerlegbar.*

Dieser Satz ist evident. Er gilt offenbar sogar für Z_m-zerlegbare Gruppen beliebiger Ordnung, wovon vielfach Gebrauch gemacht werden wird.

Satz 2. $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{G}) = \{A^p\}\{B^p\}$.

Beweis. Der Komplex $\mathfrak{K} = \{A^p\}\{B^p\}$ enthält

$$(\mathfrak{K}) = \frac{(\{A^p\})(\{B^p\})}{(\{A^p\} \cap \{B^p\})} = \frac{p^{a-1}p^{b-1}}{(\mathfrak{D})}$$

Elemente, wenn $\mathfrak{D} = \{A^p\} \cap \{B^p\}$ gesetzt wird. Dies ergibt sich so: $A^{x_1 p} B^{y_1 p} = A^{x_2 p} B^{y_2 p}$ gilt genau dann, wenn $A^{(x_1 - x_2)p} = B^{(y_2 - y_1)p}$ in $\mathfrak{D}$ liegt. $\mathfrak{K}$ enthält somit $p^{a+b-2} : (\mathfrak{D})^2$ elementefremde Nebenklassen von $\mathfrak{D}$, in denen insgesamt $p^{a+b-2} : (\mathfrak{D})$ verschiedene Elemente liegen. Ebenso erhält man

$$(\mathfrak{G}) = \frac{p^a p^b}{(\{A\} \cap \{B\})}.$$

Damit wird

$$\frac{(\mathfrak{G})}{(\mathfrak{K})} = \frac{(\{A^p\} \cap \{B^p\})\, p^2}{(\{A\} \cap \{B\})} \leq p^2.$$

Da der Satz für zyklische Gruppen selbstverständlich ist, kann $d(\mathfrak{G}) = 2$ angenommen werden. Dann ist $(\Phi(\mathfrak{G})) = (\mathfrak{G})\, p^{-2}$. Wegen $\mathfrak{K} < \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) < \Phi(\mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{K}) \geq (\Phi(\mathfrak{G}))$ folgt nun $\mathfrak{K} = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{G})$.

Satz 3. *Die Untergruppen $\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\}$ mit $0 \leq s \leq a$ und $0 \leq t \leq b$ bilden einen distributiven Verband*[1]).

Beweis. a) Um zu zeigen, daß $\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\}$ eine Gruppe ist, braucht man nur nachzuweisen, daß $\{A^p\}\{B\}$ eine Gruppe ist. (Die volle Behauptung folgt dann leicht durch einen Induktionsschluß.) Das geschieht so: $\bmod \Phi(\mathfrak{G})$ gilt $\{A^p\}\{B\} \equiv \{B\}\{A^p\}$. Zusammen mit $\Phi(\mathfrak{G}) < \{A^p\}\{B\} \cap \{B\}\{A^p\}$ ergibt das die Behauptung. Speziell folgt noch die Vertauschbarkeit der Untergruppen $\{A^{p^s}\}$ und $\{B^{p^t}\}$.

b) Jetzt betrachte man die Vereinigungsgruppe $\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\} \cup \{A^{p^i}\}\{B^{p^k}\}$ von zwei Gruppen obiger Art. (Das Zeichen $\cup$ bezeichnet hier also nicht die mengentheoretische Vereinigung!)

$$\begin{aligned}\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\} \cup \{A^{p^i}\}\{B^{p^k}\} &= \{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\}\{A^{p^i}\}\{B^{p^k}\} \\ &= \{A^{p^s}\}\{A^{p^i}\}\{B^{p^t}\}\{B^{p^k}\} = \{A^{p^m}\}\{B^{p^r}\}\end{aligned}$$

mit $m = \text{Min.}(s, i)$ und $r = \text{Min.}(t, k)$.

c) Bei der Betrachtung des Durchschnitts $\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\} \cap \{A^{p^i}\}\{B^{p^k}\}$ kann man $s \geq i$ annehmen. Von Interesse ist dann nur noch der Fall $t < k$. Sei nun $\mathfrak{D} = \{A\} \cap \{B\} = \{A^{p^\alpha}\} = \{B^{p^\beta}\}$ mit geeigneten α und β, $\mathfrak{K} = \{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\} \cap \{A^{p^i}\}\{B^{p^k}\}$, $K \in \mathfrak{K}$. Dann ist $K = A'^{p^s} B^{\mu p^t} = A^{\nu p^i} B^{\varrho p^k}$ mit geeigneten $\lambda, \mu, \nu, \varrho$;

[1]) Herrn Dr. Pickert verdanke ich den Hinweis auf die Distributivität dieses Verbandes.

daraus folgt $A^{\lambda p^s - \nu p^j} \in \mathfrak{D} = \{A^{p^\alpha}\}$, $p^\alpha | \lambda p^s - \nu p^j$. Ist $s \geqq \alpha$, so hat man $\mathfrak{R} < \{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\} < \{B^{p^\beta}\}\{B^{p^t}\}$ und $\mathfrak{R}$ hat die gewünschte Gestalt. Sei also $s < \alpha$. Aus $p^\alpha | \lambda p^s - \nu p^j$ folgt wegen $s < \alpha$ nun $p^s | \nu p^j$. Ein entsprechender Schluß für die B-Komponente liefert $p^k | \mu p^t$. Damit ergibt sich $\mathfrak{R} = \{A^{p^s}\}\{B^{p^k}\}$, also allgemein

$$\{A^{p^s}\}\{B^{p^t}\} \cap \{A^{p^j}\}\{B^{p^k}\} = \{A^{p^g}\}\{B^{p^h}\}$$

mit $g = \text{Max. } (s, j)$ und $h = \text{Max. } (t, k)$.

d) Aus b) und c) ersieht man, daß die betrachteten Gruppen wirklich einen Verband bilden. Dieser ist homomorphes Bild des Verbandes aller Zahlenpaare (s, t) mit der Teilordnung $(s_1, t_1) \leqq (s_2, t_2)$ für $s_1 \geqq s_2$ und $t_1 \geqq t_2$. Da der letzte Verband distributiv ist, ist auch der Verband der betrachteten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ distributiv.

Satz 4. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \{A^i\}\{B^j\}$ *für passende* i *und* j.

Beweis. Sei $Z = A^l B^m \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Dann ist $AZA^{-1} = A^l A B^m A^{-1} = A^l B^m$, also $B^m \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Ebenso gilt auch $A^l \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Sind nun i und j die kleinsten natürlichen Zahlen mit $A^i \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ und $B^j \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, so wird $i | l$ und $j | m$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 5. *Es gibt einen Normalteiler* $\mathfrak{N}$ *von* $\mathfrak{G}$ *mit* $\mathfrak{N} < \{A\}$ *und* $(\mathfrak{N}) \geqq p^{2a-n+1}$.

Beweis. Man stelle $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ in p^{n-a} Symbolen, den Nebenklassen nach $\{A\}$. $\{\bar{A}\}$ ist dann die Untergruppe derjenigen Permutationen, welche ein festes Symbol in Ruhe lassen. $\{\bar{A}\}$ ist daher eine zyklische Gruppe in höchstens $p^{n-a} - 1$ Symbolen. $\bar{A}$ besteht somit aus Zyklen, deren Länge p^{n-a-1} nicht übersteigt. Es existiert also ein Normalteiler $\mathfrak{N} < \{A\}$ mit p^a: $(\mathfrak{N}) \leqq p^{n-a-1}$, d.h. $(\mathfrak{N}) \geqq p^{2a-n+1}$ [2]).

Zusatz. *Sei* $(\{A\}) = (\{B\}) = p^a$ *und* $\{A\} \cap \{B\} = \mathfrak{E}$. *Dann ist* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ *nicht zyklisch.*

Beweis. Gemäß Satz 5 existieren folgende Normalteiler von $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{M} < \{A\}, \quad (\mathfrak{M}) = p.$$

$$\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{N} < \{B\}, \quad (\mathfrak{N}) = p.$$

$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ liegen beide in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$; s. [*13*] S. 70. Da $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ keine Elemente gemeinsam haben, ist $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ eine nichtzyklische Untergruppe von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$.

Satz 6. $(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \cap \{A\}) \geqq p^{2a-n}$.

Beweis. Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

Sei $\mathfrak{U} = \{A\}\{B^p\} < \mathfrak{G}$ (Satz 3). Gemäß der Induktionsvoraussetzung ist $(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}) \cap \{A\}) \geqq p^{2a-n+1}$, d. h. $A^{p^{n-a-1}} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{U})$, $B^p A^{p^{n-a-1}} B^{-p} = A^{p^{n-a-1}}$. Nach Satz 5 existiert ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} < \{A\}$ und $(\mathfrak{N}) \geqq p^{2a-n+1}$. Es folgt $\{A^{p^{n-a-1}}\} \lhd \mathfrak{G}$, $BA^{p^{n-a-1}}B^{-1} = A^{\lambda p^{n-a-1}}$. Aus $B^p A^{p^{n-a-1}} B^{-p} = A^{p^{n-a-1}}$ entnimmt man nach einer kurzen Rechnung $\lambda \equiv 1 \ (p^{2a-n})$. Die Untergruppe $\mathfrak{V} = \{A^{p^{n-a-1}}\}\{B\}$ hat höchstens die Klasse 2; dies ergibt sich aus

[2]) Ähnliche Überlegungen findet man bei J. Szép [*14*].

$(B, A^{p^{n-a-1}}) = A^{(\lambda-1)p^{n-a-1}} \in \{A^{p^{a-1}}\} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. (Siehe wieder [13].) Nun schließt man so: $(B, A^{p^{n-a}}) = (B, A^{p^{n-a-1}})^p = (B^p, A^{p^{n-a-1}}) = E$, d.h.

$$A^{p^{n-a}} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}), \quad (\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \cap \{A\}) \geqq p^{2a-n}.$$

(Bei dem letzten Schluß nehme man [20] S. 57, Formel (9) zur Hilfe.)

§ 2. Z_2-zerlegbare p-Gruppen ungerader Ordnung.

In diesem ganzen Paragraphen gelten die generellen Voraussetzungen dieses Kapitels mit dem Zusatz $p \neq 2$.

Satz 7. *$\mathfrak{G}$ ist regulär im Sinne von P. Hall [3].*

Beweis. Nach Satz 2 gilt $\omega(\mathfrak{G}) \leqq 2$ für die Z_2-zerlegbaren p-Gruppen. Für $p > 2$ hat man daher $\omega(\mathfrak{G}) \leqq p-1$, woraus die Regularität folgt. (Siehe P. Hall [4] S. 477, Theorem 2.3.)

Satz 8. *$d(\mathfrak{G}) \leqq 2$ und $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})$ sind zusammen charakteristisch für Z_2-zerlegbare p-Gruppen ungerader Ordnung.*

Beweis. Sei $d(\mathfrak{G}) = 2$ und $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})$. [Ist $d(\mathfrak{G}) = 1$, so ist $\mathfrak{G}$ zyklisch, und man ist schon fertig.] Wegen

$$p^2 = (\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})) = (\mathfrak{G}/\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})) = p^{\omega(\mathfrak{G})}$$

ist $\mathfrak{G}$ regulär und besitzt eine Basis von $\omega(\mathfrak{G}) = 2$ Elementen, d.h. jedes $X \in \mathfrak{G}$ läßt sich darstellen als $X = A^\alpha B^\beta$, wobei A und B feste Elemente aus $\mathfrak{G}$ sind, α und β eindeutig mod $(\{A\})$ bzw. mod $(\{B\})$ festgelegt sind ([3] S. 90, Theorem 4.51). Also hat man $\mathfrak{G} = \{A\}\{B\}$, sogar mit $\{A\} \cap \{B\} = \mathfrak{E}$.

Daß umgekehrt die behaupteten Relationen in Z_2-zerlegbaren p-Gruppen erfüllt sind, wurde schon in Satz 2 gezeigt, bis auf die triviale Beziehung $d(\mathfrak{G}) \leqq 2$.

Wir notieren noch als Nebenergebnis:

Satz 9. *Jede Z_2-zerlegbare p-Gruppe ungerader Ordnung besitzt eine Zerlegung $\mathfrak{G} = \{A\}\{B\}$ mit $\{A\} \cap \{B\} = \mathfrak{E}$.*

Hilfssatz 10. *Ist $(\mathfrak{G}') = p$, so läßt $\mathfrak{G}$ sich beschreiben durch die folgenden Relationen:*

$$S^{p^\alpha} = T^{p^\beta} = E, \qquad T S T^{-1} = S^{1+p^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geqq 2.$$

Beweis. Aus $(\mathfrak{G}') = p$ folgt $\mathfrak{G}' < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, denn jeder Normalteiler der Ordnung p einer p-Gruppe liegt im Zentrum derselben ([13] S. 70). Für beliebige Elemente X und Y aus $\mathfrak{G}$ ergibt sich deshalb $(X^p, Y) = (X, Y)^p = E$; s. [20] S. 57, Formel (9). Es folgt $X^p \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Wegen $d(\mathfrak{G}) = 2$ läßt sich jede maximale Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ darstellen in der Form $\mathfrak{U} = \{\Phi(\mathfrak{G}), M\}$ mit $M \notin \Phi(\mathfrak{G})$. $\mathfrak{U}$ ist abelsch vermöge $\Phi(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Diejenigen Gruppen $\mathfrak{G}$, welche nicht abelsch sind, und deren eigentliche Untergruppen alle abelsch sind, hat unter anderen Rédei bestimmt; s. [10]. Die

p-Gruppen unter diesen mit $p \neq 2$ werden beschrieben durch

Typ I: $S^{p^\alpha} = T^{p^\beta} = E, \quad T S T^{-1} = S^{1+p^{\alpha-1}}, \quad \alpha \geq 2, \quad (\mathfrak{G}) = p^{\alpha+\beta}.$

Typ II: $S^{p^\alpha} = T^{p^\beta} = C^p = E, \quad (S,T) = C, \quad (S,C) = E, \quad (T,C) = E,$
$(\mathfrak{G}) = p^{\alpha+\beta+1}.$

Typ II ist keine Z_2-zerlegbare Gruppe, scheidet also für uns aus; denn $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \{S^p\} \times \{T^p\}$ hat in Typ II den Index p^3. Übrig bleibt Typ I mit den behaupteten Relationen[3]).

Satz 11. *$\mathfrak{G}'$ ist zyklisch.*

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$ erbracht. Angenommen $\mathfrak{G}'$ sei nicht zyklisch. Dann betrachte man $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}') = \mathfrak{G}^*$. Gemäß der Induktionsvoraussetzung darf man annehmen, daß $\mathfrak{G}^{*\prime}$ vom Typ (p,p) ist. Es genügt also zu zeigen, daß dies nicht eintreten kann.

Sei $\mathfrak{G}^{*\prime} = \{K\} \times \{C\}$ mit $C \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$. Läge auch K in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$, so hätte man $\mathfrak{G}^{*\prime} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$. Dann würde das Zentrumselement (A^*, B^*) schon $\mathfrak{G}^{*\prime}$ erzeugen, und $\mathfrak{G}^{*\prime}$ wäre doch zyklisch. Es gilt also $K \notin \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$ und $\mathfrak{G}^{*\prime} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*) = \{C\}$. Jetzt betrachte man $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$:

$$\{\mathfrak{G}^*/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)\}' \cong \mathfrak{G}^{*\prime} \cdot \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*) \cong \mathfrak{G}^{*\prime}/\mathfrak{G}^{*\prime} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*) \cong \{K\}.$$

$\mathfrak{G}^*/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$ hat somit die in Hilfssatz 10 angegebene Struktur:

$$\overline{S}^{p^\alpha} = \overline{T}^{p^\beta} = \overline{E}, \qquad \overline{T}\,\overline{S}\,\overline{T}^{-1} = \overline{S}^{1+p^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geq 2.$$

In $\mathfrak{G}^*$ selbst ist dann

$$S^{p^\alpha} = Z_1, \qquad T^{p^\alpha} = Z_2, \qquad T S T^{-1} = S^{1+p^{\alpha-1}} Z_3 \quad \text{mit} \quad Z_i \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*).$$

Nun folgt

$$T S^{p^{\alpha-1}} T^{-1} = S^{p^{\alpha-1}(1+p^{\alpha-1})} Z_3^{p^{\alpha-1}}, \qquad (T, S^{p^{\alpha-1}}) = (S^{p^{\alpha-1}} Z_3)^{p^{\alpha-1}} = (T,S)^{p^{\alpha-1}} = E.$$

(Letzteres wegen $\alpha \geq 2$ und der Struktur von $\mathfrak{G}^{*\prime}$.) Da $\mathfrak{G}^*$ von S und T erzeugt wird [wegen $\mathfrak{G}^{*\prime} \neq \mathfrak{E}$ und $d(\mathfrak{G}^*) = 2$ gilt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*) < \Phi(\mathfrak{G}^*)$!], folgt $S^{p^{\alpha-1}} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$. Das ist jedoch nicht wahr, da erst S^{p^α} in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$ liegt. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\mathfrak{G}'$ doch zyklisch ist.

Satz 11 ließe sich bei stärkerer Ausnutzung der Regularität wesentlich einfacher beweisen. Die angegebenen Überlegungen führen jedoch auch für $p = 2$ zu einem Resultat (s. § 3).

12. Hauptsatz I. *Jede Z_2-zerlegbare p-Gruppe ungerader Ordnung besitzt einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe.*

Beweis. Für abelsche Gruppen stimmt der Satz. Er gilt auch im Falle $(\mathfrak{G}') = p$, wie man aus Hilfssatz 10 entnimmt. Sei weiterhin $(\mathfrak{G}') > p$. Der Beweis wird wieder durch Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{G}$ geführt.

[3]) Siehe etwa auch H. Liermann [8].

$\Omega_1(\mathfrak{G}') = \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$. $(\mathfrak{N}) = p$, da $\mathfrak{G}'$ zyklisch ist. Weiter hat man $\mathfrak{N} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. In $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ kann der Satz als richtig angenommen werden. $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ enthält daher einen zyklischen Normalteiler $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ mit zyklischer Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}{\mathfrak{S}/\mathfrak{N}} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}$ wird erzeugt von der Zentrumsuntergruppe $\mathfrak{N}$ und einem weiteren Element, ist demnach abelsch. Ist $\mathfrak{S}$ nicht zyklisch, so muß $\mathfrak{S} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}$ gelten, wo $\mathfrak{L}$ eine zyklische Gruppe ist. Nun folgt $\mathfrak{N} < \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}')$, da $\mathfrak{N} = \Omega_1(\mathfrak{G}')$, $(\mathfrak{G}') > p$ und $\mathfrak{G}'$ zyklisch ist. Andererseits hat man $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{S}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{L}) \geqq \mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{S} > \mathfrak{G}'$ ist das ein Widerspruch. $\mathfrak{S}$ ist also doch zyklisch.

$\mathfrak{G}$ wird definiert durch die folgenden Gleichungen:

$$S^{p^a} = E, \qquad T^{p^b} = S^t, \qquad T S T^{-1} = S^k, \qquad k^{p^b} \equiv 1\,(p^a), \qquad t(k-1) = 0\,(p^a).$$

(Siehe [20] S. 95, Satz 20.) $\mathfrak{G}$ besitzt somit eine „normale Zerlegung", in der der eine Faktor Normalteiler ist. S und T werden in Zukunft stets die Elemente einer normalen Zerlegung bezeichnen, während A und B die Elemente sind, welche die ursprüngliche Zerlegung repräsentieren.

Hier taucht nun die Frage auf, ob es auch eine normale Zerlegung gibt, in der Satz 9 befriedigt wird, d.h. ob es einen zyklischen Normalteiler $\{S\}$ mit zyklischer Vertretergruppe gibt. Ist S ein Element von maximaler Ordnung in $\mathfrak{G}$, so stimmt dies ([13] S. 71, Satz 86). Im allgemeinen gibt es aber keine solche Zerlegung.

Beispiel. Sei $\mathfrak{G}$ definiert durch die Gleichungen $S^{p^3} = E$, $T^{p^3} = S^{p^2}$, $T S T^{-1} = S^{1+p}$. Sei nun $\{L\} \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\{L\}$ zyklisch mit $L = S^i T^j$. Dann ist $\{L\}$ eine Obergruppe von $\mathfrak{G}' = \{S^p\}$, also $S^p = L^{\lambda p^x}$ mit geeignetem x und geeignetem zu p teilerfremden λ. Eine einfache Rechnung liefert die Bedingungen $x = 1$, $p \nmid i$, $p^2 | j$, $(\{L\}) = p^3$. Als Vertretergruppe von $\mathfrak{G}/\{L\}$ darf man $\{S^k T\}$ annehmen. Aber $(S^k T)^{p^2} = T^{p^2} = S^{p^2} \neq E$. In $\mathfrak{G}$ gibt es demnach keinen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Vertretergruppe.

Aus den angegebenen Relationen für die Z_2-zerlegbaren Gruppen entnimmt man durch eine einfache Rechnung die Richtigkeit der Formel

$$\left(\mathfrak{O}_i(\mathfrak{G}), \mathfrak{O}_j(\mathfrak{G})\right) < \mathfrak{O}_{i+j+1}(\mathfrak{G}).$$

Setzt man darin $j = 0$, so sieht man, daß die $\mathfrak{O}_i(\mathfrak{G})$ eine Zentralkette von $\mathfrak{G}$ bilden. Die allgemeine Theorie der Zentralketten (vgl. [20], S. 118—121) führt dann zu den Gleichungen

$$\mathfrak{G}^{[i+1]} < \mathfrak{O}_i(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}_{\mu-i}.$$

Speziell hat man $c(\mathfrak{G}) \leqq \mu(\mathfrak{G})$. (Diese Ergebnisse sind von Interesse, da sie sich auf Z_m-zerlegbare p-Gruppen ungerader Ordnung übertragen lassen.) Liegt der im Zusatz zu Satz 5 behandelte Fall vor, so erhält man wegen $\Omega_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{O}_{\mu-1}(\mathfrak{G})$ aus der obigen Gleichung wieder das frühere Resultat, allerdings mit der Einschränkung $p \neq 2$.

Satz 13. *Die Z_2-zerlegbaren p-Gruppen ungerader Ordnung sind genau die regulären p-Gruppen ungerader Ordnung, welche höchstens $p+1$ Untergruppen der Ordnung p enthalten.*

Beweis. a) $\mathfrak{G}$ sei regulär und enthalte höchstens $p+1$ Untergruppen der Ordnung p. Gibt es in $\mathfrak{G}$ nur eine Untergruppe der Ordnung p, so ist $\mathfrak{G}$ zyklisch; s. [20] S. 112, Satz 15. Andernfalls kann man in $\mathfrak{G}$ ein Zentrumselement Z der Ordnung p und noch ein weiteres Element R der Ordnung p wählen, derart, daß $\mathfrak{U}=\{Z,R\}$ die Ordnung p^2 hat. $\mathfrak{U}$ umfaßt dann alle Untergruppen der Ordnung p. $\mathfrak{U}=\Omega_1(\mathfrak{G})$, da $\mathfrak{U}$ alle X mit $X^p=E$ enthält. Aus $p^2=(\Omega_1(\mathfrak{G}))=p^{\omega(\mathfrak{G})}$ (s. P. Hall [3] S. 79, Theorem 4.3) folgt $\omega(\mathfrak{G})=2$. Demnach besitzt $\mathfrak{G}$ eine Basis von 2 Elementen, ist also Z_2-zerlegbar.

b) Sei jetzt $\mathfrak{G}$ Z_2-zerlegbar. Dann ist $\omega(\mathfrak{G})\leq 2$, also wie eben wegen der Regularität von $\mathfrak{G}$ wieder $(\Omega_1(\mathfrak{G}))\leq p^2$. Nun kann $\mathfrak{G}$ höchstens $p+1$ Untergruppen der Ordnung p enthalten, nämlich die eigentlichen Untergruppen $\mathfrak{B}\neq\mathfrak{E}$ von $\Omega_1(\mathfrak{G})$.

Für $p\geq 5$ darf in Satz 13 die Voraussetzung der Regularität gestrichen werden. Eine irreguläre p-Gruppe besitzt nämlich mindestens p^{p-1} Elemente der Ordnung p (P. Hall [4] S. 479, Theorem 2.41). Jede p-Gruppe mit nur p^2 Lösungen von $X^p=E$ ist daher regulär, sofern $p>3$. Für $p\geq 5$ gibt somit Satz 13 in Verbindung mit Hauptsatz I eine Übersicht über alle p-Gruppen mit höchstens $p+1$ Untergruppen der Ordnung p. Im Falle $p=3$ treten jedoch weitere Typen auf:

Beispiel. Die Relationen

$$S^9=E,\quad R^{-3}=S^3,\quad (R,S)=T,\quad T^3=E,\quad (S,T)=S^{-3},\quad (R,T)=E$$

definieren eine Gruppe der Ordnung 3^4; s. [1], S. 142. Für diese Gruppe benutzt man mit Vorteil folgende monomiale, treue Darstellung

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\ \varepsilon^3&0&0\end{pmatrix},\qquad R=\begin{pmatrix}\varepsilon^{-1}&0&0\\0&\varepsilon^2&0\\0&0&\varepsilon^{-1}\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix}\varepsilon^{-3}&0&0\\0&\varepsilon^3&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

wobei ε eine primitive 9-te Einheitswurzel ist. Man berechnet jetzt leicht

$$\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G})=\{S^3\}=\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}^{[3]},\qquad \Phi(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}'=\Omega_1(\mathfrak{G})=\{S^3\}\times\{T\}.$$

Wegen

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}))=3^3\neq(\Omega_1(\mathfrak{G}))=3^2$$

ist diese Gruppe irregulär. Sie umfaßt 9 Lösungen von $X^3=E$.

Satz 14. *Jede Untergruppe einer Z_2-zerlegbaren p-Gruppe ungerader Ordnung ist Z_2-zerlegbar.*

Beweis. Sei $\mathfrak{U}<\mathfrak{G}$. $\mathfrak{U}$ ist dann auch regulär und enthält sicher nicht mehr Untergruppen der Ordnung p als $\mathfrak{G}$, also höchstens $p+1$ Stück. Satz 13 zeigt nun, daß auch $\mathfrak{U}$ Z_2-zerlegbar ist.

Satz 15. *Je zwei Untergruppen einer Z_2-zerlegbaren p-Gruppe ungerader Ordnung sind vertauschbar.*

Beweis. Es genügt, diesen Satz für zwei zyklische Gruppen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ zu beweisen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $\Omega_1(\mathfrak{U}_1) = \Omega_1(\mathfrak{U}_2) = \mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\{\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2\}$. Eine Induktion nach der Gruppenordnung liefert

$$\mathfrak{U}_1/\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{U}_2/\mathfrak{N} = \mathfrak{U}_2/\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{U}_1/\mathfrak{N}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 < \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{N} = \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1.$$

Wegen $(\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2) = (\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1)$ folgt $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1$.

b) $\Omega_1(\mathfrak{U}_1) \neq \Omega_1(\mathfrak{U}_2)$. Dann ist $\Omega_1(\mathfrak{U}_1) \cdot \Omega_1(\mathfrak{U}_2) = \Omega_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$. Wie eben bekommt man nun $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 < \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{M} = \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1$ und dann $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1$.

(Satz 15 wurde mit verbandstheoretischen Überlegungen von Iwasawa bewiesen; vgl. [7] S. 189, Satz 14. Den obigen einfachen Beweis verdanke ich Herrn Prof. Wielandt.)

Ein Satz über die Automorphismen nichtabelscher, Z_2-zerlegbarer p-Gruppen ungerader Ordnung, der in § 5 gebraucht wird, sei an dieser Stelle noch angegeben:

Satz 16. *Ist $\mathfrak{G}$ eine nichtabelsche, Z_2-zerlegbare p-Gruppe ungerader Ordnung, so induziert die Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ eine Automorphismengruppe, welche sich bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ durch Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ darstellen läßt.* [Die benutzte Basis wird sich beim Beweis aus der Struktur von $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}_1(\mathfrak{G}')$ ergeben.]

Beweis. Die Automorphismen von $\mathfrak{G}$ kann ich als Automorphismen von $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}/\mathfrak{S}_1(\mathfrak{G}')$ betrachten, da $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{G}')$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Bewirkt $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{G}^*$ den identischen Automorphismus, so läßt $\mathfrak{a}$ alle Restklassen nach $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{G}')$ fest, läßt also wegen $\Phi(\mathfrak{G}) > \mathfrak{S}_1(\mathfrak{G}')$ auch die Restklassen nach $\Phi(\mathfrak{G})$ fest. Nach Hilfssatz 10 wird $\mathfrak{G}^*$ beschrieben durch

$$S^{p^\alpha} = T^{p^\beta} = E, \qquad T S T^{-1} = S^{1+p^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geqq 2.$$

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Automorphismus von $\mathfrak{G}^*$, so hat man

$$S^{\mathfrak{a}} = S^\lambda T^\tau, \qquad T^{\mathfrak{a}} = S^\mu T^\varrho,$$

$$(T S T^{-1})^{\mathfrak{a}} = S^\mu T^\varrho S^\lambda T^\tau T^{-\varrho} S^{-\mu} = S^\mu S^{\lambda(1+p^{\alpha-1})^\varrho} S^{-\mu(1+p^{\alpha-1})^\tau} T^\tau$$
$$= S^{\lambda+(\lambda\varrho-\mu\tau)p^{\alpha-1}} T^\tau.$$

Andererseits ist dies gleich dem folgenden Ausdruck:

$$(S^{\mathfrak{a}})^{1+p^{\alpha-1}} = (S^\lambda T^\tau)^{1+p^{\alpha-1}} = S^{\lambda+\lambda p^{\alpha-1}} T^{\tau+\tau p^{\alpha-1}}.$$

[Man beachte $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{G}^*) < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$ und die Tatsache, daß in $\mathfrak{G}^*$ die Relation $(XY)^p = X^p Y^p$ gilt.]

Der Vergleich obiger Formeln liefert die Kongruenzen

(1) $\qquad \tau p^{\alpha-1} \equiv 0 (p^\beta) \qquad$ und $\qquad$ (2) $\quad \lambda \equiv \lambda\varrho - \mu\tau (p)$.

Aus $(T^{\mathfrak{a}})^{p^\beta} = E = S^{\mu p^\beta} T^{\varrho p^\beta}$ erhält man noch

(3) $\qquad \mu p^\beta \equiv 0 (p^\alpha)$.

Für $\alpha \leqq \beta$ folgt aus (1) $p \mid \tau$. Da $\begin{pmatrix} \lambda & \tau \\ \mu & \varrho \end{pmatrix}$ keine singuläre Matrix ist, ist λ zu p teilerfremd; (2) ergibt dann $\varrho \equiv 1 (p)$. Im Falle $\alpha > \beta$ liefert (3) die Aussage $p \mid \mu$. Aus (2) folgt wieder $\varrho \equiv 1 (p)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

§ 3. Z_2-zerlegbare 2-Gruppen.

Zunächst zeige ein Beispiel, daß jetzt die Verhältnisse wesentlich komplizierter sind:

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung 2^5 sei gegeben durch die Relationen

$$B^8 = A^2 = E, \qquad (A, B) = C, \qquad (B, C) = B^4, \qquad (A, C) = E, \qquad C^2 = E.$$

$\mathfrak{G}$ entsteht, wenn man den Normalteiler $\mathfrak{N} = \{A\} \times \{B^4\} \times \{C\}$ mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 4 erweitert. $B\,\mathfrak{N}$ erzeugt $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, $B^4 \in \mathfrak{N}$. Transformation von $\mathfrak{N}$ mit B^{-1} bewirkt folgenden Automorphismus von $\mathfrak{N}$:

$$A^{B^{-1}} = A\,C, \qquad C^{B^{-1}} = C\,B^4, \qquad (B^4)^{B^{-1}} = B^{B^4}.$$

Faßt man $\mathfrak{N}$ als Vektormodul mit den Basisvektoren A, C, B^4 auf, so wird die Transformation mit B^{-1} durch eine lineare Transformation dieses Moduls dargestellt, nämlich

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine treue monomiale Darstellung der betrachteten Gruppe wird geliefert durch die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet leicht $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \{B^4\}$, $\mathfrak{G}' = \{C\} \times \{B^4\}$ und $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}) = \{B^2, C\}$.

$(A\,B)^2 = C\,B^2 \in \{B\}$, $(A\,B)^4 = B^4$. Daher wird $(\{B\}\,\{A\,B\}) = 2^5 = (\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G} = \{B\}\,\{A\,B\}$.

$\mathfrak{G}$ ist also Z_2-zerlegbar, und $\mathfrak{G}'$ ist eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung 4. $\mathfrak{G}$ enthält die Untergruppe $\mathfrak{N}$ vom Typus (2,2,2), welche nicht Z_2-zerlegbar ist. Hauptsatz I gilt demnach nicht für 2-Gruppen, und auch Satz 14 ist verletzt. Ferner bestätigt man leicht, daß der Verband der Untergruppen der obigen Gruppe nicht modular ist; die Gruppe besitzt also gewiß nichtvertauschbare Untergruppen. (Ein Beispiel einer nichtmodularen Z_2-zerlegbaren 2-Gruppe wird schon durch die Diedergruppe der Ordnung 8 geliefert.)

Satz 17. *Ist $\mathfrak{G}$ eine Z_2-zerlegbare 2-Gruppe, so ist $d(\mathfrak{G}') \leqq 2$.*

Beweis. Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

a) Sei $\Phi(\mathfrak{G}') \neq \mathfrak{E}$. Dann betrachte man $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}')$. Wegen $d(\mathfrak{G}') = d\left(\mathfrak{G}'/\Phi(\mathfrak{G}')\right) \leqq 2$ folgt die Behauptung.

b) $\mathfrak{G}$ enthalte einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}' = \mathfrak{E}$. Jetzt folgt die Behauptung aus $\{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\}' \cong \mathfrak{G}'$.

c) Nun sei $\Phi(\mathfrak{G}') = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{G}'$ elementar abelsch. Weiter gebe es keinen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{N}) = 2$ und $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{G}'$. Dies bedeutet $\Omega_1(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})) < \mathfrak{G}'$. Schließlich kann noch $d(\mathfrak{G}') = 3$ angenommen werden. Nun gilt

$$(A, B^2) = (A, B)\,(A, B)^{B^{-1}} = (A, B)^{-1}\,(A, B)^{B^{-1}} = \big(B, (A, B)\big) \in \mathfrak{G}^{[3]}$$

$$(A^2, B^2) = (A, B^2)^{A^{-1}}\,(A, B^2) = \big(A, (A, B^2)\big) \in (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{[3]}) = \mathfrak{G}^{[4]}.$$

Ist $\big(\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})\big) \geqq 4$, so hat man $\mathfrak{G}^{[3]} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}^{[4]} = \mathfrak{E}$, $(A^2, B^2) = E$. $\Phi(\mathfrak{G}) = \{A^2\}\{B^2\}$ ist dann abelsch. Wegen $\mathfrak{G}' < \Phi(\mathfrak{G})$ und $d\big(\Phi(\mathfrak{G})\big) \leqq 2$ folgt $d(\mathfrak{G}') \leqq 2$. Sei also weiterhin $\big(\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})\big) = 2$. Die Voraussetzung $\Omega_1\big(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})\big) < \mathfrak{G}'$ zeigt nun, daß $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ zyklisch ist. Die bei Transformation durch $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}'$ bewirkten Automorphismen lassen sich als lineare Transformationen des Vektormoduls $\mathfrak{G}'$ auffassen. Führt man in dem Modul geeignete Koordinaten ein, so erscheinen die Transformationsmatrizen in Dreiecksgestalt; s. [*13*] S. 222, Satz 204. Genauer erhält man folgendes Aussehen der Matrizen:

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus entnimmt man, daß $\mathfrak{G}^{[3]}$ und $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})$ vertauschbar sind. Es folgt $(B, A^4) = (B, A^2)\,(B, A^2)^{A^{-2}} = (A^2, (B, A^2)) \in (\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}^{[3]}) = \mathfrak{E}$, also $A^4 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Ebenso kommt man zu $B^4 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Nun betrachte man $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}^* \cdot (\mathfrak{G}^*) \leqq 2^4$. Falls $(\mathfrak{G}^*) \leqq 2^3$, so ist $\mathfrak{G}^*$ zyklisch. $\mathfrak{G}'$ ist dann eine zyklische Erweiterung der zyklischen Gruppe $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, daher $d(\mathfrak{G}') \leqq 2$. Im Falle $(\mathfrak{G}^*) = 2^4$ ist nach dem Zusatz zu Satz 5 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)$ nicht zyklisch, somit $\big(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^*)\big) \geqq 4$. Deshalb wird $(\mathfrak{G}^{*\prime}) = 2$. Wie eben folgt wieder $d(\mathfrak{G}') \leqq 2$.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen läßt sich die in § 2 entwickelte Theorie auch für 2-Gruppen durchführen.

Hilfssatz 18. *Sei* $\mathfrak{G}$ *Z_2-zerlegbar,* $(\mathfrak{G}) = 2^n$, $(\mathfrak{G}') = 2$. *Hat jede maximale Untergruppe* $\mathfrak{U}$ *von* $\mathfrak{G}$ *höchstens zwei Erzeugende, so wird* $\mathfrak{G}$ *beschrieben durch*

$$S^{2^\alpha} = T^{2^\beta} = E, \qquad T\,S\,T^{-1} = S^{1+2^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geqq 2$$

oder

$$S^4 = E, \qquad S^2 = T^2, \qquad T\,S\,T^{-1} = S^{-1}.$$

Beweis. Genau wie in Hilfssatz 10 zeigt man, daß alle eigentlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ abelsch sind. Nach Rédei [*10*] S. 244 hat dann $\mathfrak{G}$ eine der folgenden Gestalten

Typ I: $\quad S^{2^\alpha} = T^{2^\beta} = E, \qquad T\,S\,T^{-1} = S^{1+2^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geqq 2$

Typ II: $\quad S^{2^\alpha} = T^{2^\beta} = C^2 = E, \qquad (S, T) = C, \qquad (S, C) = (T, C) = E$

Typ III: $\quad S^4 = E, \qquad S^2 = T^2, \qquad T\,S\,T^{-1} = S^{-1}$

(Typ III ist die Quaternionengruppe.)

Wir betrachten nun Typ II: $\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \{S^2\} \times \{T^2\} \times \{C\}$. Da in Z_2-zerlegbaren Gruppen stets $d(\mathfrak{O}_1(\mathfrak{G})) \leqq 2$ gilt, folgt für eine Z_2-zerlegbare Gruppe vom Typ II etwa $T^2 = E, \beta = 1$. $\mathfrak{U} = \{T, \Phi(\mathfrak{G})\} = \{T\} \times \{S^2\} \times \{C\}$ ist maximal in $\mathfrak{G}$. Da nach Voraussetzung $d(\mathfrak{U}) \leqq 2$ ist, wird auch $S^2 = E$. $(ST)^2 = S^2 T^2 C = C$, $(ST)^4 = E$. Man sieht jetzt leicht ein, daß $\mathfrak{G} = \{ST, T\}$ eine Diedergruppe der Ordnung 8 ist, welche schon unter Typ I mit $\alpha = 2$, $\beta = 1$ enthalten ist. Somit bleiben nur die behaupteten Typen übrig.

Satz 19. *Sei $\mathfrak{G}$ eine Z_2-zerlegbare 2-Gruppe. Ist $d(\mathfrak{U}) \leqq 2$ für alle maximalen Untergruppen $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ erfüllt, so besitzt $\mathfrak{G}$ einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe.*

Beweis. Zunächst zeigt man durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$, daß $\mathfrak{G}'$ zyklisch ist. Der Beweis verläuft wie in Satz 11 bis zu der Aussage, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ eine der in Hilfssatz 18 angegebenen Gruppen ist. Typ I wird dann wie in Satz 11 erledigt. Bei Typ III verfährt man so:

$$S^4 = Z_1, \qquad T^4 = Z_2, \qquad S^2 = T^2 Z_3, \qquad T S T^{-1} = S^{-1} Z_4 \quad \text{mit} \quad Z_i \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}).$$

$$T S T^{-1} S^{-1} = S^{-2} Z_4, \quad \text{also} \quad S^{-4} Z_4^2 = E.$$

$$T S^2 T^{-1} = S^{-2} Z_4^2, \qquad T S^2 T^{-1} S^{-2} = S^{-4} Z_4^2 = E, \qquad S^2 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}).$$

Das ist ein Widerspruch, da erst S^4 in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ liegen sollte. $\mathfrak{G}'$ ist daher wie in Satz 11 zyklisch.

Da alle in Hilfssatz 18 angeführten Gruppen einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe haben, gelingt der Beweis der restlichen Aussage wie bei Hauptsatz I.

Kap. II. Z_2-zerlegbare Gruppen beliebiger Ordnung.

In diesem Kapitel sei $\mathfrak{G} = \{A\}\{B\}$ stets eine Z_2-zerlegbare Gruppe der beliebigen Ordnung $(\mathfrak{G}) = p_1^{g_1} p_2^{g_2} \dots p_k^{g_k}$. Dabei seien die Primzahlen p_i nach ihrer Größe geordnet: $p_1 > p_2 > \dots > p_k$. Ferner sei $(\{A\}) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $(\{B\}) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$. Die p_i-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ seien mit $\mathfrak{P}_i(\mathfrak{G}) = \mathfrak{P}_i$ bezeichnet. Es wird meist keine Rolle spielen, um welche p_i-Sylowgruppe es sich handelt. Ein spezielles Sylowsystem[4]) sei noch hervorgehoben: Es sind dies die Gruppen $\widehat{\mathfrak{P}}_i(\mathfrak{G}) = \left\{A^{p_1^{\alpha_1} \dots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_{i+1}^{\alpha_{i-1}} \dots p_k^{\alpha_k}}\right\} \left\{B^{p_1^{\beta_1} \dots p_{i-1}^{\beta_i - 1} p_{i+1}^{\beta_i + 1} \dots p_k^{\beta_k}}\right\}$. Diese $\widehat{\mathfrak{P}}_i(\mathfrak{G})$ sind Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$; jedes $\widehat{\mathfrak{P}}_i$ ist Produkt der p_i-Sylowgruppen von $\{A\}$ und $\{B\}$; vgl. Wielandt [18]. Da alle p_i-Sylowgruppen $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{G}$ zu $\widehat{\mathfrak{P}}_i$ isomorph sind, sind alle $\mathfrak{P}_i$ Z_2-zerlegbar. Dies wird von Bedeutung sein.

§ 4. Kompositions- und Hauptreihen Z_2-zerlegbarer Gruppen.

Satz 20. *Seien $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ Gruppen, deren sämtliche Untergruppen invariant sind*[5]). *Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{K}$ auflösbar. Insbesondere ist das Produkt von zwei abelschen Gruppen stets auflösbar.*

[4]) Siehe P. Hall [5].

[5]) Die nichtabelschen Gruppen dieser Art heißen Hamiltonsch; sie lassen sich alle angeben; s. [20] S. 123. Zu Satz 20 vgl. Itô [6].

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach der Gruppenordnung erbracht. Da sich die Voraussetzung auf alle Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ überträgt, genügt der Nachweis eines von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$ verschiedenen auflösbaren Normalteilers von $\mathfrak{G}$.

Es darf $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{E}$ angenommen werden, da sonst $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}$ den gewünschten Normalteiler liefern würde.

Ist $\mathfrak{K}$ nicht maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gibt es ein $\mathfrak{U} = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{H}_1$ mit $\mathfrak{E} \leqq_{+} \mathfrak{H}_1 \leqq_{+} \mathfrak{H}$. Nun ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H} > \mathfrak{H}_1$, also $\mathfrak{H}_1$ ein von $\mathfrak{E}$ verschiedener Normalteiler des Durchschnitts $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$. Wegen $\mathfrak{H}_1 \lhd \mathfrak{H}$ gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} < \mathfrak{U}$ (s. Ore [9] S. 238 oder Rédei-Szép [12] S. 436). $\mathfrak{U}$ ist nach Induktionsannahme auflösbar, $\mathfrak{N}$ als Untergruppe von $\mathfrak{U}$ ebenfalls.

Ist $\mathfrak{K}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so darf angenommen werden, daß $\mathfrak{K}$ sein eigener Normalisator ist. (Sonst hat man $\mathfrak{K} \lhd \mathfrak{G}$.) Für mindestens ein $G \in \mathfrak{G}$ sei nun $\mathfrak{K}^G \neq \mathfrak{K}$, aber $\mathfrak{K}^G \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{K}$, $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{K}^G$, also auch $\mathfrak{D} < \{\mathfrak{K}, \mathfrak{K}^G\} = \mathfrak{G}$. Ist jedoch für $\mathfrak{K}^G \neq \mathfrak{K}$ stets $\mathfrak{K}^G \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{E}$, so stelle man $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{K}$. Bei dieser Darstellung wird $\mathfrak{H}$ regulär dargestellt. (Aus $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}^G \neq \mathfrak{E}$ mit $G = KH$ würde nämlich folgen $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}^H \neq \mathfrak{E}$ und dann durch Transformation mit H^{-1} die falsche Aussage $\mathfrak{H}^{H^{-1}} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} \neq \mathfrak{E}$.) Da $\mathfrak{K}$ eigener Normalisator ist und mit allen seinen Konjugierten den Durchschnitt $\mathfrak{E}$ hat, bleibt bei $\mathfrak{K}$ nur ein Symbol fest. Dies gilt auch für die $\mathfrak{K}^G$. $\mathfrak{H}$ und die $\mathfrak{K}^G$ enthalten genau

$$(\mathfrak{H}) + ((\mathfrak{K}) - \mathbf{1})(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{H})(\mathfrak{K}) = (\mathfrak{G})$$

Elemente von $\mathfrak{G}$, erschöpfen also ganz $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{H}$ enthält daher alle Permutationen von $\mathfrak{G}$, welche kein Symbol fest lassen und, abgesehen von E, auch nur diese. Da auch H^G mit $H \in \mathfrak{H}$, $H \neq E$ und beliebigem $G \in \mathfrak{G}$ kein Symbol fest läßt, folgt $H^G \in \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$. Damit ist der gewünschte Normalteiler nachgewiesen.

Hilfssatz 21. *Ist* $p_k | (\{A\})$, *so ist* $\{A^{p_k}\}\{B\}$ *eine Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *vom Index* p_k.

Satz 22. *Die Sylowgruppe* $\mathfrak{P}_1$ *zum größten Primteiler der Gruppenordnung ist Normalteiler von* $\mathfrak{G}$. (Siehe Wielandt [18].)

Es ist zweckmäßig, Hilfssatz 21 und Satz 22 gemeinsam zu beweisen, und zwar zuerst eine schwächere Form von Hilfssatz 21, mit dieser dann Satz 22 und schließlich den vollen Hilfssatz 21 unter Verwendung von Satz 22.

a) Behauptung. $\{A^{p_k}\}\{B\}$ oder $\{A\}\{B^{p_k}\}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Index p_k.

Beweis. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$; die Ordnung von $\mathfrak{N}$ ist eine Primzahlpotenz p_i^e. Ist $p_k | (\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$, so kann man vermöge einer Induktionsannahme behaupten, daß etwa $\{A^{p_k}, B, \mathfrak{N}\}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Index p_k ist.

$$(\{A^{p_k}\}\{B\}) = \frac{(\{A\})(\{B\})}{p_k(\mathfrak{D}^*)} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D}^* = \{A^{p_k}\} \cap \{B\}.$$

Setzt man $\mathfrak{D} = \{A\} \cap \{B\}$, so ist wegen $(\mathfrak{D}^*) \leq (\mathfrak{D})$

$$(\{A^{p_k}\}\{B\}) \geq \frac{(\{A\})(\{B\})}{p_k(\mathfrak{D})} = \frac{(\mathfrak{G})}{p_k}.$$

Es folgt $(\{A^{p_k}\}\{B\}) \geq (\{A^{p_k}, B, \mathfrak{N}\})$, somit $\{A^{p_k}, B, \mathfrak{N}\} = \{A^{p_k}\}\{B\}$.

Ist aber p_k kein Teiler von $(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$, so hat man $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{N}$, $\alpha_k \leq 1$, $\beta_k \leq 1$. Wegen $d(\mathfrak{P}_k) \leq 2$ ergibt sich $d(\mathfrak{N}) \leq 2$, $(\mathfrak{N}) \leq p_k^2$.

Hat $\mathfrak{N}$ die Ordnung p_k^2, so ist $\mathfrak{N} = \left\{A^{p_1^{\alpha_1}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}\right\} \times \left\{B^{p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}}\right\}$. Die von $\mathfrak{G}$ bei Transformation in $\mathfrak{N}$ bewirkten Automorphismen lassen sich dann durch zweireihige Matrizen mod p_k darstellen vermöge der folgenden Zuordnung: Ist

$$\left(A^{p_1^{\alpha_1}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}\right)^G = A^{p_1^{\alpha_1}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} g_{11}} B^{p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} g_{12}}$$

$$\left(B^{p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}}\right)^G = A^{p_1^{\alpha_1}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} g_{21}} B^{p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} g_{22}},$$

so sei G die Matrix mit den Elementen g_{ik} zugeordnet. Bei diesem Prozeß wird A auf eine Matrix der Gestalt

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

abgebildet. $\mathfrak{a}$ liegt in der linearen Gruppe $GL(2, p_k)$ [6]), welche die Ordnung $p_k(p_k^2-1)(p_k-1)$ hat. Daher ist $(\{\mathfrak{a}\}) \mid ((\{A\}), p_k(p_k^2-1)(p_k-1))$. Für $p_k \neq 2$ folgt $(\{\mathfrak{a}\}) \mid p_k$. Daraus ergibt sich aber $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}$, da $\mathfrak{P}_k$ abelsch ist. Ist $p_k = 2$, so hat man $a_{22} \equiv 1$, $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{e}$, und wie eben ist wieder $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}$. Die gleiche Überlegung führt zu $\mathfrak{b} = \mathfrak{e}$.

Hat $\mathfrak{N}$ nur die Ordnung p_k, so kommt man wie oben zu einer Darstellung der in $\mathfrak{N}$ bewirkten Automorphismen durch einreihige Matrizen. In diesem Falle ist $(\{\mathfrak{a}\}) \mid ((\{A\}), p_k - 1) = 1$, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}$.

$\mathfrak{N}$ liegt daher stets im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Ist nun etwa $\mathfrak{P}_k \cap \{B\} \neq \mathfrak{E}$, so ist $\hat{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{G}) \times \{\mathfrak{P}_k \cap \{B\}\} = \left\{A^{p_k^{\alpha_k}}\right\}\left\{B^{p_k^{\beta_k}}\right\}\left\{B^{p_1^{\beta_1}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}}\right\} = \{A^{p_k}\}\{B\}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ der behaupteten Art. Im Falle $\alpha_k = 0$ ist $\hat{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{G})$ die gesuchte Gruppe.

b) Beweis von Satz 22. Sei $p_1 \neq p_k$. (Sonst ist nichts zu beweisen.) Nach a) ist etwa $\mathfrak{U} = \{A^{p_k}\}\{B\}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ein Induktionsschluß gestattet die Annahme $\mathfrak{P}_1 \lhd \mathfrak{U}$. In $\mathfrak{G}$ hat $\mathfrak{P}_1$ dann höchstens p_k Konjugierte. Andererseits gilt für die Anzahl N der Konjugierten von $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{G}$ die Kongruenz $N \equiv 1 \ (p_1)$. Wegen $p_k < p_1$ folgt $N = 1$, also $\mathfrak{P}_1 \lhd \mathfrak{G}$.

c) Beweis von Hilfssatz 21. Ist $(\mathfrak{G}) = p_k^{g_k}$, so ist der Satz richtig (Satz 3). Andernfalls kann man den unter a) verwendeten Normalteiler $\mathfrak{N}$ aus $\mathfrak{P}_1$ wählen, so daß gewiß $p_k \nmid (\mathfrak{N})$ gilt. Aus $p_k \mid (\{A\})$ folgt dann auch $p_k \mid (\{A\}\mathfrak{N}/\mathfrak{N})$. Wie vorher erhält man nun durch Induktion die Richtigkeit der vollen Behauptung von Hilfssatz 21.

In Hilfssatz 21 ist wesentlich, daß p_k kleinster Primteiler der Gruppenordnung $(\mathfrak{G})$ ist:

[6]) Bezeichnung der linearen Gruppen gemäß v. d. Waerden [15].

Beispiel. $(\mathfrak{G}) = p^2 q,\ p > q.$

$$\mathfrak{P}_1 = \{P_1\} \times \{P_2\}, \qquad \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{Q}_1 = \{Q\}.$$

Folgende Relationen mögen gelten:

$$P_1^p = P_2^p = Q^q = (P_1, Q) = E, \qquad Q P_2 Q^{-1} = P_1^\varrho P_2^\lambda$$

mit

$$\lambda^q \equiv 1 \ (p), \qquad \lambda \not\equiv 1 \ (p), \qquad \varrho \not\equiv 0 \ (p).$$

Diese Gruppe besitzt die Zerlegung $\mathfrak{G} = \{P_1 Q\}\ \{P_2\}$. $\{Q\}\ \{P_2\}$ ist aber keine Untergruppe wegen $Q P_2 Q^{-1} = P_1^\varrho P_2^\lambda \notin \{Q\}\ \{P_2\}$.

Durch wiederholte Anwendung von Satz 22 bekommt man eine Normalteilerkette $\mathfrak{E} \lhd \mathfrak{P}_1 \lhd \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_{k-1} < \mathfrak{G}$. Kombiniert man die Aussage $\mathfrak{Q}_k(\mathfrak{G}) \lhd \mathfrak{G}$ mit dem bekannten Satz, daß in einer p-Gruppe jede Untergruppe von Index p invariant ist, so sieht man, daß in einer Z_2-zerlegbaren Gruppe jede Untergruppe vom Index p_k invariant ist.

Satz 23. *$\mathfrak{U} = \{A^i\}\ \{B^j\}$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche also eine der Zerlegung von $\mathfrak{G}$ entsprechende Zerlegung besitzt. Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ und der Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ erlauben dann Zerlegungen der Gestalt $\{A^k\}\ \{B^l\}$.* (Genau wie Satz 4 zu beweisen.)

24. Hauptsatz II. *Jede Z_2-zerlegbare Gruppe ist überauflösbar*[7]).

Ist erst der Nachweis eines Normalteilers von Primzahlordnung gelungen, so folgt Hauptsatz II sofort durch Induktion. Die Existenz eines solchen Normalteilers ist aber eine Folge des jetzt zu beweisenden Satzes 24a.

Sei $(\{A\}) = s\, p_1^{\alpha_1}$, $(\{B\}) = t\, p_1^{\beta_1}$. Zur Abkürzung sei gesetzt $A^{s p_1^{\alpha_1 - 1}} = A^*$, $B^{t p_1^{\beta_1 - 1}} = B^*$.

Satz 24a. *$\{A^*\}$ oder $\{B^*\}$ ist invariant in $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Sei $\alpha_1 > 0$.

Ist $\{A^*\} < \{A\} \cap \{B\}$, so ist der Satz klar. Falls $\beta_1 = 0$ hat man $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{G}) = \{A^s\} \lhd \mathfrak{G}$ und dann auch $\{A^*\} \lhd \mathfrak{G}$. Nach Ausschluß dieser Möglichkeiten gilt gewiß $\Omega_1(\mathfrak{P}_1) = \{A^*\} \times \{B^*\} \lhd \mathfrak{G}$. Die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach dem Zentralisator $\mathfrak{C}(\Omega_1(\mathfrak{P}_1))$ von $\Omega_1(\mathfrak{P}_1)$ in $\mathfrak{G}$, welche mit $\overline{\mathfrak{G}}$ bezeichnet sei, ist isomorph zu einer Gruppe von Automorphismen von $\Omega_1(\mathfrak{P}_1)$ und läßt sich in der schon beschriebenen Art durch zweireihige Matrizen mod p_1 darstellen. Bei dieser Zuordnung werden A und B auf die Matrizen

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

abgebildet. Die Behauptung läßt sich nun offenbar so formulieren: Es ist $a_{21} \equiv 0 \ (p_1)$ oder $b_{12} \equiv 0 \ (p_1)$.

a) Sei $p_1 | (\overline{\mathfrak{G}})$, etwa $p_1 | (\{\mathfrak{a}\})$. Dann hat eine geeignete Potenz $\mathfrak{a}^\nu$ von $\mathfrak{a}$ die Ordnung p_1, und es ist $\mathfrak{a}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Wegen $(GL(2, p_1)) = p_1 (p_1^2 - 1)\ (p_1 - 1)$

[7]) Herr Itô teilte Herrn Prof. Wielandt brieflich einen anderen Beweis dieses Satzes mit.

folgt nach Satz 22, daß $\{\mathfrak{a}^\nu\}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant ist. Der Normalisator von $\{\mathfrak{a}^\nu\}$ in $GL(2, p_1)$ besteht aber aus den Matrizen $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, wie man leicht nachrechnet. Somit ist notwendig $b_{12} \equiv 0\ (p_1)$, also $\{A^*\} \lhd \mathfrak{G}$.

b) Sei $p_1 \chi(\overline{\mathfrak{G}})$. Dann ist gewiß $a_{22} \not\equiv 1$, $b_{11} \not\equiv 1\ (p_1)$, denn andernfalls hätte $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ die Ordnung p_1. Die Annahme $a_{21} b_{12} \not\equiv 0\ (p_1)$ wird nun zum Widerspruch geführt.

Sei etwa $p_k \mid (\{A\})$. In der Gruppe $\{A^{p_k}\}\{B\}$ gilt der Satz gemäß der Induktionsannahme.

$$\mathfrak{a}^{p_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & a_{22}^{p_k} \end{pmatrix} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $c = a_{21} \cdot \frac{a_{22}^{p_k} - 1}{a_{22} - 1}$. Es wird $c \equiv 0\ (p_1)$, da $b_{12} \not\equiv 0\ (p_1)$ ist.

Wegen $a_{21} b_{12} \not\equiv 0\ (p_1)$ und $a_{22} \not\equiv 1\ (p_1)$ folgt nun $a_{22}^{p_k} \equiv 1\ (p_1)$, also $\mathfrak{a}^{p_k} = \mathfrak{e}$. $\{\mathfrak{b}\}$ hat daher in $\overline{\mathfrak{G}}$ den Index p_k; nach einer früheren Bemerkung ist deshalb $\{\mathfrak{b}\}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant. Somit gilt eine Gleichung $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^\lambda$ mit geeignetem λ. Berücksichtigt man, daß mit $\mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{b}^\lambda$ eine Matrix der Gestalt $\begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist, so liefert der Vergleich der Matrixelemente g_{22} in der Gleichung $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^\lambda \mathfrak{a}$ den Widerspruch $a_{21} b_{12} \equiv 0\ (p_1)$.

Die Aussagen der nun folgenden Sätze 25 bis 29 sind für jede überauflösbare Gruppe gültig. (Übrigens beschreibt auch Satz 22 eine Eigenschaft, die allen überauflösbaren Gruppen zukommt; s. P. Hall [2] S. 103, Theorem 3.14.)

Satz 25. *$\mathfrak{G}'$ ist nilpotent.*

(Erstmals bewiesen wohl von E. Wendt in [16] S. 481. Einen einfachen Beweis findet man bei O. Ore [9] S. 459.)

Satz 26. *Jede Darstellung von $\mathfrak{G}$ läßt sich auf monomiale Gestalt transformieren.* (Vgl. Zassenhaus [21] S. 207.)

Satz 27. *Ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{U}_0 < \mathfrak{U}_1 < \cdots < \mathfrak{U}_j = \mathfrak{G}$ eine Kette von Untergruppen von $\mathfrak{G}$, welche sich nicht verfeinern läßt, so ist der Index von $\mathfrak{U}_i$ in $\mathfrak{U}_{i+1}$ eine Primzahl.* (Siehe Iwasawa [7] S. 174.)

Satz 28. *Jedes p_1-Sylowkomplement $\mathfrak{Q}_1$ bewirkt bei Transformation in $\mathfrak{P}_1$ eine abelsche Automorphismengruppe.*

Beweis. Es genügt, die Automorphismen in $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ zu betrachten; denn diejenigen Automorphismen, welche alle Nebenklassen nach $\Phi(\mathfrak{P}_1)$ fest lassen, haben Ordnungen p_1^α (s. [20] S. 45). Man kann sich daher auf die Untersuchung von $\mathfrak{H}/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ beschränken. Wegen der Existenz einer primzahlstufigen Hauptreihe ist die zu betrachtende Automorphismengruppe, welche man sich durch Matrizen mod p_1 in der gewohnten Weise dargestellt denke, halbreduzibel in Bestandteile der Dimension 1. Nach der Schurschen Erweiterung des Satzes von Maschke ist sie sogar vollständig reduzibel, ist also eine abelsche Gruppe von Diagonalmatrizen. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 29. $\mathfrak{J} = \mathfrak{P}_1' \times \mathfrak{P}_2' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k' \lhd \mathfrak{G}$. $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}'$ *gilt genau dann, wenn* $\mathfrak{G}$ *nilpotent ist.*

Beweis. $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{Q}_1$. $\mathfrak{Q}_1$ ist als Untergruppe von $\mathfrak{G}$ auch überauflösbar. Ein Induktionsschluß gestattet daher die Annahme $\mathfrak{P}_2' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k' \lhd \mathfrak{Q}_1$. $\mathfrak{Q}_1$ bewirkt nach Satz 28 in $\mathfrak{P}_1$ eine abelsche Automorphismengruppe. Daher wird $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{Q}_1'$ zentralisiert. Wegen $\mathfrak{P}_2' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k' < \mathfrak{Q}_1'$ folgt nun $\mathfrak{P}_2' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k' \lhd \mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{G}$. Unter Heranziehung von $\mathfrak{P}_1' \lhd \mathfrak{G}$ ergibt sich jetzt $\mathfrak{J} \lhd \mathfrak{G}$. Speziell folgt noch: Sind $\mathfrak{P}_i$ und $\overline{\mathfrak{P}}_i$ zwei verschiedene Sylowgruppen zur Primzahl p_i, so ist $\mathfrak{P}_i' = \overline{\mathfrak{P}}_i'$.

Ist $\mathfrak{U}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so hat $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ einen Index p_j (Satz 27). Insbesondere enthält $\mathfrak{U}$ eine Gruppe der Ordnung $p_i^{\varepsilon_i - 1}$ für jedes i. Daher gilt $\mathfrak{U} > \Phi(\overline{\mathfrak{P}}_i) > \mathfrak{P}_i'$ für eine geeignete p_i-Sylowgruppe $\overline{\mathfrak{P}}_i$, also auch $\mathfrak{U} > \mathfrak{P}_1' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k'$ und dann weiter $\Phi(\mathfrak{G}) > \mathfrak{P}_1' \times \cdots \times \mathfrak{P}_k'$. Aus der letzten Beziehung liest man den zweiten Teil der Behauptung ab, denn $\mathfrak{G}' < \Phi(\mathfrak{G})$ ist eine kennzeichnende Eigenschaft der nilpotenten Gruppen (Wielandt [17]).

§ 5. Die Kommutatorgruppe Z_2-zerlegbarer Gruppen.

Es wurde schon gezeigt, daß $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist (Satz 25). Die p_i-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}'$ sei mit $\mathfrak{R}_i$ bezeichnet; also ist

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_k.$$

Genauere Auskunft über die $\mathfrak{R}_i$ gibt Hauptsatz III.

30. Hauptsatz III. *Für* $p_i \neq 2$ *ist* $\mathfrak{R}_i$ *abelsch. Speziell sind alle* Z_2*-zerlegbaren Gruppen ungerader Ordnung metabelsch.*

Beweis. Zunächst eine Vorbemerkung: Ist $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist $\{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\}' \cong \mathfrak{G}'\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$, daher auch $\mathfrak{R}_i(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \cong \mathfrak{R}_i\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{N}$.

Beim Beweis, der durch Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{G}$ geführt wird, sind einige Fälle zu unterscheiden.

a) $\mathfrak{G}$ besitze zwei Normalteiler $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Die Induktionsannahme liefert nun $\{\mathfrak{R}_i/\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{N}\}' = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}_i' < \mathfrak{N}$ und ebenso $\mathfrak{R}_i' < \mathfrak{M}$, also

$$\mathfrak{R}_i' < \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}.$$

b) Für $i > 1$ kommt man auf jeden Fall durch, da man ein $\mathfrak{N}$ mit $(\mathfrak{N}) = p_1$ und daher $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}_i = \mathfrak{E}$ wählen kann. $\mathfrak{R}_i' < \mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$ ergibt die Behauptung.

c) $\mathfrak{G}$ enthalte nun nur einen minimalen Normalteiler; dieser hat notwendig die Ordnung p_1. Daraus folgt wegen $\mathfrak{R}_i \lhd \mathfrak{G}$ insbesondere $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_3 = \cdots = \mathfrak{R}_k = \mathfrak{E}$ also $\mathfrak{G}' = \mathfrak{R}_1 < \mathfrak{P}_1$. Die Gruppe $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1'$ ist ein abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1'$, dessen Ordnung und Index teilerfremd sind. Daher ist (vgl. [20] S. 136)

$$(*) \quad \begin{aligned} \mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' &= \{\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{G}'/\mathfrak{P}_1'\} \times \{\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1')\} \\ &= \mathfrak{G}'/\mathfrak{P}_1' \times \{\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1')\}. \end{aligned}$$

Man darf annehmen, daß $\mathfrak{P}_1$ nicht abelsch ist; sonst wäre wegen $\mathfrak{R}_1' < \mathfrak{P}_1' = \mathfrak{E}$ die Behauptung schon bewiesen. Dann gilt nach dem Burnsideschen Basissatz $d(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1') = 2$.

Sei $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_1')$ der Zentralisator von $\mathfrak{P}_1'$ in $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_1')$ ist als Automorphismengruppe der zyklischen Gruppe $\mathfrak{P}_1'$ abelsch. Deshalb ist $\mathfrak{G}' < \mathfrak{C}(\mathfrak{P}_1')$, d.h. $\mathfrak{P}_1' < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}')$. Ist $\mathfrak{G}'/\mathfrak{P}_1'$ zyklisch, so ist $\mathfrak{G}'$ als zyklische Erweiterung eines Zentrumsnormalteilers abelsch, d.h. $\mathfrak{R}_1$ ist abelsch. Andernfalls hat man $d(\mathfrak{G}'/\mathfrak{P}_1') = 2$. Aus (*) ergibt sich jetzt $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1') = \mathfrak{E}$, somit $\mathfrak{G}' = \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{R}_1$.

Die Induktionsannahme zeigt, daß man $(\mathfrak{P}_1') = (\mathfrak{R}_1') = p_1$ setzen darf. $\mathfrak{P}_1$ hat deshalb die wohlbekannte Struktur:

$$S^{p_1^\alpha} = T^{p_1^\beta} = E, \qquad T S T = S^{1+p_1^{\alpha-1}}, \qquad \alpha \geq 2.$$

Sei $\mathfrak{U}$ die Gruppe derjenigen Elemente eines p_1-Sylowkomplements, welche $\mathfrak{P}_1$ zentralisieren. Da die p_1-Sylowkomplemente wegen $(\mathfrak{G}') = p_1^{g_1}$ abelsch sind, ist $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{E}$ muß $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ sein. $\mathfrak{P}_1$ enthält somit seinen Zentralisator, und $\mathfrak{Q}_1 \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1$ ist isomorph zu einer Gruppe von Automorphismen von $\mathfrak{P}_1$. Nach Satz 16 ist $\mathfrak{Q}_1$ zyklisch. [Wegen der Teilerfremdheit der Ordnungen der dort betrachteten Matrizen zu p_1 lassen sich diese Matrizen nämlich vollständig reduzieren auf die Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. $\mathfrak{Q}_1$ ist daher isomorph zu einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe des Galois-Feldes $GF(p_1)$, ist also zyklisch. Nach einer bei Satz 28 gemachten Bemerkung bewirkt nämlich kein Element von $\mathfrak{Q}_1$ in $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ den identischen Automorphismus.] $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ ist bezüglich $\mathfrak{Q}_1$ vollreduzibel. Es gibt daher eine Basis X, Y von $\mathfrak{P}_1/\Phi(\mathfrak{P}_1)$ mit der Eigenschaft $X^Q = X^\lambda$ und $Y^Q = Y^\tau \bmod \Phi(\mathfrak{P}_1)$, wobei Q ein erzeugendes Element von $\mathfrak{Q}_1$ sei. Wegen der oben angegebenen Gestalt der Q zugeordneten Matrix ist $\lambda \equiv 1$ oder $\tau \equiv 1\ (p_1)$, d.h. $\mathfrak{G}' < \{\Phi(\mathfrak{P}_1), Y\}$ bzw. $\mathfrak{G}' < \{\Phi(\mathfrak{P}_1), X\}$. In jedem Falle erhält man den Widerspruch $\mathfrak{G}' \neq \mathfrak{P}_1$. Damit ist der Satz bewiesen.

Vermerkt sei noch die einfache Beziehung $\mathfrak{R}_k \cong \mathfrak{P}_k'$. Diese ergibt sich so:

$$\mathfrak{P}_k' \cong \{\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{k-1}\}' \cong \mathfrak{G}'\,\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{k-1} = \mathfrak{G}'\,\mathfrak{R}_1 \times \dots \times \mathfrak{R}_{k-1} \cong \mathfrak{R}_k.$$

Könnte man beweisen, daß alle Z_2-zerlegbaren 2-Gruppen metabelsch sind, so würde diese Bemerkung in Verbindung mit Hauptsatz III zeigen, daß überhaupt alle Z_2-zerlegbaren Gruppen metabelsch sind.

Eine eingehendere Untersuchung liefert notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{R}_i$ zyklisch ist. Als Anwendung dieser Überlegungen sei ohne Beweis der folgende eigenartige Satz erwähnt:

Satz 31. *Sei $\mathfrak{G}$ eine Z_2-zerlegbare Gruppe ungerader Ordnung, deren Sylowgruppen zu den Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ nicht abelsch sind. Dann ist $\mathfrak{G}'$ zyklisch.*

Kap. III. Z_m-zerlegbare Gruppen.

§ 6. Hauptreihen Z_m-zerlegbarer Gruppen.

Sei nun $\mathfrak{G} = \{A_1\}\{A_2\}\{A_3\} \dots \{A_m\}$ Produkt der m paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen $\{A_i\}$. Wie früher sei $p_1^{g_1} p_2^{g_2} \dots p_k^{g_k}$ die Ordnung von $\mathfrak{G}$, wobei die p_i nach fallender Größe geordnet sind. Die Auflösbarkeit der Z_m-zerlegbaren Gruppen und die Invarianz der Sylowgruppe zum größten

Primteiler der Gruppenordnung wurde in Wielandt [18] gezeigt. Das Ziel dieses Paragraphen ist die Ausdehnung von Hauptsatz II auf Z_m-zerlegbare Gruppen.

Hilfssatz 32. *Aus jedem zyklischen Faktor $\{A_i\}$ entnehme man, sofern $p_1|(\{A_i\})$, die Untergruppe der Ordnung p_1, welche mit $\{L_i\}$ bezeichnet werden möge. Das Erzeugnis aller dieser $\{L_i\}$ ist ein elementar abelscher Normalteiler $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$, dessen Ordnung p_1^m nicht übersteigt.*

Beweis. $A_j L_i A_j^{-1} \in \Omega_1(\mathfrak{P}_1(\{A_i\}\{A_j\}))$. Entweder gilt $\{L_i\} = \{L_j\}$ und dann $L_i \in \mathfrak{Z}(\{A_i\}\{A_j\})$ oder $\{L_i\} \neq \{L_j\}$ und $\Omega_1(\mathfrak{P}_1(\{A_i\}\{A_j\})) = \{L_i\} \times \{L_j\}$. In jedem Falle hat man eine Aussage der Gestalt $A_j L_i A_j^{-1} = L_i^a L_j^b$ und $L_i L_j = L_j L_i$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 33. *Das p_1-Sylowkomplement $\hat{\mathfrak{Q}}_1$ bewirkt bei Transformation in dem Normalteiler $\mathfrak{L}$ eine abelsche Automorphismengruppe.*

Beweis. (Durch Induktion nach der Gruppenordnung.) $\{Q_i\}$ sei das p_1-Sylowkomplement von $\{A_i\}$, $\{P_i\}$ die p_1-Sylowgruppe von $\{A_i\}$. Dann ist $\mathfrak{U}_i = \{A_1\} \ldots \{A_{i-1}\}\{P_i\}\{A_{i-1}\} \ldots \{A_m\}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$; denn $A_j^x P_i^y A_j^{-x} \in \mathfrak{P}_1(\{A_i\}\{A_j\}) = \{P_i\}\{P_j\}$, also $A_j^x P_i^y A_j^{-x} = P_i^s P_j^t$, $A_j^x P_i^y = P_i^s A_j^r$. Beim Übergang zu den in $\mathfrak{L}$ bewirkten Automorphismen werde $\hat{\mathfrak{Q}}_1$ auf $\bar{\mathfrak{Q}}_1$ abgebildet. Es ist also $\bar{\mathfrak{Q}}_1 \simeq \hat{\mathfrak{Q}}_1/\mathfrak{C}(\mathfrak{L})$, wenn $\mathfrak{C}(\mathfrak{L})$ der Zentralisator von $\mathfrak{L}$ in $\hat{\mathfrak{Q}}_1$ ist. Ist p_1^n die Ordnung von $\mathfrak{L}$, so läßt $\bar{\mathfrak{Q}}_1$ sich durch n-dimensionale Matrizen mod p_1 darstellen ($n \leqq m$). Nach Induktionsvoraussetzung ist $\bar{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{U}_i)$ eine abelsche Gruppe, sofern $\mathfrak{U}_i$ eine eigentliche Untergruppe ist. Bei diesem Übergang von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{U}_i$ bleibt $\mathfrak{L}$ erhalten. Die Dimension der $\bar{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{G})$ darstellenden Matrizengruppe ist daher ebenso groß wie die Dimension der $\bar{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{U}_i)$ darstellenden Matrizengruppe. Da $\bar{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{U}_i)$ abelsch ist, gilt $(\bar{Q}_s, \bar{Q}_t) = \hat{E}$ für $s, t \neq i$. Enthält $\hat{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{G})$ mindestens drei Faktoren, so kann man je zwei Matrizen $\bar{Q}_s$ und $\bar{Q}_t$ in einer geeigneten Untergruppe $\bar{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{U}_i)$ finden. $\bar{\mathfrak{Q}}_1$ ist also abelsch. Es bleibt der Fall zu behandeln, daß $\hat{\mathfrak{Q}}_1(\mathfrak{G}) = \{Q_1\}\{Q_2\}$ nur zwei Faktoren enthält. $\mathfrak{L}$ zerlege man nun in folgender Weise:

$$\mathfrak{L} = \{L_{i_1}\} \times \{L_{i_2}\} \times \cdots \times \{L_{i_n}\}.$$

(Die L_i wurden oben erklärt.) Ist p_1 kein Teiler von $(\{A_1\})$ und $(\{A_2\})$, so gilt $\{L_{i_\nu}\} \lhd \{A_j\}\{A_{i_\nu}\}$, $A_j L_{i_\nu} A_j^{-1} = L_{i_\nu}^{\lambda_\nu}$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots, n$ und $j = 1$ oder $j = 2$. Die $\bar{Q}_1$ und $\bar{Q}_2$ zugeordneten Matrizen erscheinen dann in Diagonalgestalt. Sei nun $p_1|(\{A_1\})$. Dann kann $i_1 = 1$ gewählt werden. Aus $Q_1 L_{i_\nu} Q_1^{-1} = L_1^s L_{i_\nu}^t$ entnimmt man folgende Gestalt der zu $\bar{Q}_1$ gehörigen Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{32} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wenn $(\{A_2\})$ nicht durch p_1 teilbar ist, erscheint die $\overline{Q}_2$ zugeordnete Matrix in Diagonalgestalt. Dann ist $\{L_1\}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{L}\,\widehat{\mathfrak{Q}}_1$. Falls $p_1|(\{A_2\})$ und $\{L_1\}=\{L_2\}$, gilt dasselbe. Ist $\{L_1\}\neq\{L_2\}$, so kann man $L_{i_2}=L_2$ wählen und bekommt zu $\overline{Q}_2$ eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Betrachtung der Untergruppe $\{A_1\}\{A_2\}$ liefert wegen Satz 28 die Vertauschbarkeit der Teilmatrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $a_{21}\,b_{12}\equiv 0\,(p_1)$. Man erhält somit $\{L_1\}\lhd\mathfrak{L}\,\widehat{\mathfrak{Q}}_1$ oder $\{L_2\}\lhd\mathfrak{L}\,\widehat{\mathfrak{Q}}_1$.

In jedem Falle besitzt $\mathfrak{L}\,\widehat{\mathfrak{Q}}_1$ einen Normalteiler der Ordnung p_1, welcher in einem der zyklischen Faktoren $\{A_i\}$ liegt. Die Anwendung dieses Resultats auf $\mathfrak{L}\,\widehat{\mathfrak{Q}}_1|\{L_1\}$ usw. liefert schließlich eine Normalteilerkette $\mathfrak{E}\lhd\mathfrak{N}_1\lhd\cdots\lhd\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{L}\,\widehat{\mathfrak{Q}}_1$, in der die Faktorgruppen aufeinanderfolgender Glieder die Ordnung p_1 haben. Nach der Erweiterung des Satzes von Jordan-Hölder auf Hauptreihen hat daher jede Hauptreihe von $\mathfrak{L}\,\widehat{\mathfrak{Q}}_1$ die Eigenschaft, daß die Faktorgruppen der Ordnung p_1^{α} stets die Ordnung p_1 haben. Wegen $p_1\nmid(\widehat{\mathfrak{Q}}_1)$ ist die $\overline{\mathfrak{Q}}_1$ zugeordnete Matrizengruppe vollreduzibel und enthält nur irreduzible Bestandteile der Dimension 1. $\overline{\mathfrak{Q}}_1$ hat deshalb in geeigneten Koordinaten Diagonalgestalt und ist daher abelsch.

Zusatz. *Die in Hilfssatz 33 betrachtete Matrizengruppe läßt sich sogar über dem Galois-Feld $GF(p_1)$ auf Diagonalgestalt transformieren.*

Beweis. Die erzeugenden Matrizen $\overline{Q}_i$ haben Eigenwerte aus $GF(p_1)$, wie man sofort an ihrer Gestalt sieht. Transformiert man nun die $\overline{Q}_i$ simultan auf Diagonalgestalt, so haben die entstehenden Matrizen Elemente aus $GF(p_1)$. Dann haben aber auch alle Produkte dieser Matrizen Elemente aus $GF(p_1)$, d.h. die Gruppe läßt sich über $GF(p_1)$ auf Diagonalgestalt transformieren.

34. Hauptsatz IV. *Jede Z_m-zerlegbare Gruppe ist überauflösbar.*

Beweis. $\mathfrak{K}=\mathfrak{L}\cap\mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_1)$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Q}_1$ bewirken wegen $\mathfrak{K}<\mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_1)$ bei Transformation in $\mathfrak{K}$ die gleichen Automorphismen. Diese Gruppe von Automorphismen ist nach Hilfssatz 33 kommutativ. Beachtet man noch den Zusatz, so sieht man, daß $\mathfrak{K}$ direkt zerfällt in lauter Normalteiler der Ordnung p_1 von $\mathfrak{G}$. Nachdem jetzt ein minimaler Normalteiler der Ordnung p_1 von $\mathfrak{G}$ nachgewiesen ist, läßt sich die volle Behauptung leicht durch Induktion beweisen.

Die Sätze 25 bis 29 des § 4, welche direkte Folgerungen aus Hauptsatz II waren, übertragen sich jetzt ohne weiteres auf Z_m-zerlegbare Gruppen. Man entnimmt diesen Sätzen folgendes Konstruktionsprinzip: Man erweitere die

Sylowgruppe zur größten Primzahl, welche die Gruppenordnung noch teilt, mit der Sylowgruppe zur zweitgrößten Primzahl. Die auftretende Gruppe von Automorphismen ist abelsch, das Faktorensystem äquivalent zu einem zerfallenden Faktorensystem. Die so erhaltene Gruppe erweitere man dann mit der Sylowgruppe zur nächstgrößten Primzahl. Auch bei diesem Schritt liegen die eben beschriebenen einfachen Verhältnisse vor. So fahre man fort, bis alle Primteiler der Gruppenordnung aufgebraucht sind. Die Struktur der Z_m-zerlegbaren Gruppen hängt also sehr eng mit der Struktur ihrer Sylowgruppen zusammen. Deshalb muß eine eingehendere Theorie der Z_m-zerlegbaren Gruppen mit der Untersuchung der entsprechenden p-Gruppen beginnen.

§ 7. Bemerkungen über Z_m-zerlegbare p-Gruppen.

Schon bei drei Faktoren treten gegenüber Kap. I neue Erscheinungen auf, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll.

Beispiel. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung p^6 sei definiert durch die Gleichungen

$$A_1^{p^2} = A_2^{p^2} = A_3^{p^2} = E, \qquad A_2 A_1 A_2^{-1} = A_1^{1+p}, \qquad A_3 A_2 A_3^{-1} = A_2^{1+p},$$
$$A_1 A_3 A_1^{-1} = A_3^{1+p}.$$

Diese Gruppe ist eine abelsche Erweiterung ihres Zentrums

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \{A_1^p\} \times \{A_2^p\} \times \{A_3^p\};$$

sie erlaubt die Zerlegung $\mathfrak{G} = \{A_1\}\{A_2\}\{A_3\}$. (Man überzeugt sich leicht, daß die angegebenen Relationen wirklich eine Gruppe der Ordnung p^6 liefern; s. etwa [20] S. 97.) Eine einfache Rechnung zeigt

$$\mathfrak{G}' = \Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \Omega_1(\mathfrak{G}) = \{A_1^p\} \times \{A_2^p\} \times \{A_3^p\}.$$

Es ist bemerkenswert, daß hier die Kommutatorgruppe ebenso viele Erzeugende hat wie die ganze Gruppe. Bei Z_2-zerlegbaren Gruppen ungerader Primzahlpotenzordnung kann dies nach Satz 11 nicht vorkommen.

Nun betrachte man die Untergruppe $\mathfrak{U} = \{A_1 A_2, A_3\}$ von $\mathfrak{G}$. Eine kurze Rechnung ergibt $(A_1 A_2, A_3) = A_2^{-p} A_3^p$, $(A_1 A_2)^p = A_1^p A_2^p$. Daraus folgt

$$\mathfrak{U}' = \{A_2^{-p} A_3^p\}, \qquad \Phi(\mathfrak{U}) = \Omega_1(\mathfrak{U}) = \{A_1^p\} \times \{A_2^p\} \times \{A_3^p\}.$$

Die Gruppe $\mathfrak{U}$ ist nicht Z_2-zerlegbar, wenn man jetzt p ungerade wählt, da sie eine Untergruppe vom Typ (p, p, p) enthält. Dann kann sie aber wegen $d(\mathfrak{U}) = 2$ auch nicht Z_3-zerlegbar sein. Satz 14 hat demnach bei mehr als zwei Faktoren kein striktes Analogon.

Satz 35. *Ist $\mathfrak{G}$ eine Z_m-zerlegbare p-Gruppe ungerader Ordnung, so ist*

$$(\mathfrak{O}_i(\mathfrak{G}), \mathfrak{O}_j(\mathfrak{G})) < \mathfrak{O}_{i+j}(\mathfrak{G}') < \mathfrak{O}_{i+j+1}(\mathfrak{G}).$$

Beweis. Zunächst sei vermerkt, daß auch für Z_m-zerlegbare p-Gruppen die Gleichung $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{O}_1(\mathfrak{G}) = \{A_1^p\}\{A_2^p\}\ldots\{A_m^p\}$ richtig ist. Man sieht dies

genau so wie bei zwei Faktoren ein. Zu beweisen ist also nur noch

$$(\mathfrak{V}_i(\mathfrak{G}), \mathfrak{V}_j(\mathfrak{G})) < \mathfrak{V}_{i+j}(\mathfrak{G}').$$

Für zwei Faktoren ist dies richtig, wie man leicht mit Hilfe der definierenden Relationen bestätigt. Für m Faktoren schließt man dann so:

Sei $\mathfrak{U}_{st} = \{A_s\}\{A_t\}$.

$$(A_s^{p^i}, A_t^{p^j}) \in (\mathfrak{V}_i(\mathfrak{U}_{st}), \mathfrak{V}_j(\mathfrak{U}_{st})) < \mathfrak{V}_{i+j}(\mathfrak{U}'_{st}) < \mathfrak{V}_{i+j}(\mathfrak{G}').$$

Da die $(A_s^{p^i}, A_t^{p^j})$ mit ihren Konjugierten die Gruppe $(\mathfrak{V}_i(\mathfrak{G}), \mathfrak{V}_j(\mathfrak{G}))$ erzeugen, folgt daraus die Behauptung.

Literatur.

[1] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2. Aufl. 1911. — [2] HALL, PHILIP: A note on soluble groups. J. London Math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [3] HALL, PHILIP: A contribution to the theory of groups of prime power orders. Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 29—95 (1933). — [4] HALL, PHILIP: On a theorem of Frobenius. Proc. London Math. Soc. (2) **40**, 468—501 (1936). — [5] HALL, PHILIP: On the Sylow systems of a soluble group. Proc. London Math. Soc. (2) **43**, 316—323 (1937). — [6] ITÔ, NOBORU: Remarks on factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 83—84 (1951). — [7] IWASAWA, K.: Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen. J. Fac. Sci. Tokyo (2) **4**, 171—199 (1941). — [8] LIERMANN, H.: Endliche Gruppen, deren Kommutatorgruppenordnung eine Primzahl $p \neq 2$ ist. Schr. math. Inst. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin **4**, 183—207 (1938). — [9] ORE, O.: Contributions to the theory of groups of finite orders. Duke Math. J. **5**, 431—460 (1938). — [10] RÉDEI, L.: Das schiefe Produkt in der Gruppentheorie. Comm. Math. Helv. **20**, 225—264 (1947). — [11] RÉDEI, L.: Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen I. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **1**, 74—98 (1950). — [12] RÉDEI, L., u. SZÉP, J.: On factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **13**, 235—238 (1950). — [13] SPEISER, A.: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl. 1927. — [14] SZÉP, J.: Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen. Comm. Math. Helv. **22**, 31—33 (1949). — [15] WAERDEN, B. L. v. d.: Gruppen von linearen Transformationen. Ergebn. Math. **4**. — [16] WENDT, E.: Über eine specielle Classe von Gruppen. Math. Ann. **55**, 479—492 (1902). — [17] WIELANDT, H.: Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen. Math. Z. **41**, 281—282 (1936). — [18] WIELANDT, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951). — [19] ZAPPA, G.: Sui gruppi supersolubili. Rend. Sem. Math. Univ. Roma (4) **2**, 323—330 (1937). — [20] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. I. 1937. — [21] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Seminar Hansischen Univ. **11**, 187—220 (1936).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 31. Januar 1953.)

INGRAHAM, R. L.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 265—271 (1953)

Linear Connection in Spin-Collineation Space.

By
RICHARD L. INGRAHAM.

The concept of covariant p-vector differentiation over an (affinely or projectively) connected manifold allows a formal unification of the linear connection and the curvature tensor into a larger geometric entity, the p-vector linear connection. This paper specializes to the case of a symmetric connection, when the theory becomes particularly simple. This generalized linear connection formalism allows then the introduction of a natural induced connection of the local spaces whose points are ordered collections of p-vectors $[p = 0, 1, \ldots, n]$. For manifolds of even (odd) dimension in the affine (projective) case, these are nothing other than the local spaces whose points are collineations in the associated local spin-spaces; and the covariant derivative thus introduced allows the differentiation of collineations *with respect to a collineation* in the precise way to be explained.

I. P-vector-differentiation.

We start with a manifold with coordinates x^μ $(\mu = 1, \ldots, n)$ provided with the linear connection $\Gamma^\xi_{\mu\nu}$[1]). [If the manifold has the curvilinear projective instead of affine geometry then it is $(n-1)$-dimensional, x^μ are the homogeneous coordinates, $\Gamma^\xi_{\mu\nu}$ is homogeneous in them of degree -1, and all objects encountered in the sequel will be homogeneous of various degrees. The following theory applies indifferently to both types of geometry.] The covariant derivative of a vector v^ψ is[1])

$$(1.1) \qquad \nabla_\varphi v^\psi = (A^\psi_\lambda \partial_\varphi + \Gamma^\psi_{\varphi\lambda}) v^\lambda \quad [(\varphi) \text{ hol. or non hol.}].$$

Now a p-vector is defined as a tensor $v^{\varphi_1 \ldots \varphi_p}$ (or $v_{\varphi_1 \ldots \varphi_p}$) of valence p which is alternating in all indices: $v^{\varphi_1 \ldots \varphi_p} = v^{[\varphi_1 \ldots \varphi_p]}$ (or $v_{\varphi_1 \ldots \varphi_p} = v_{[\varphi_1 \ldots \varphi_p]}$). v^ψ is a vector, that is, a 1-vector; and ∇_ψ is the 1-vector covariant derivative. One

[1]) The notation used will be mainly that of SCHOUTEN, cf. Comp. Math. **3**, 1 (1936). As general index convention small Greek letters $\lambda, \mu, \ldots, \omega$ run over $1, \ldots, n$; the ranges of other alphabets are explicitly specified. The symbols $(\varphi), (\psi)$, etc. denote general (holonomic or non-holonomic) systems; transformations between them are defined by sets of functions $A^\varphi_{\varphi'}$ [Det $A^\varphi_{\varphi'} \neq 0$] which equal $\partial_{\varphi'} x^\varphi$ $(\partial_{\varphi'} \equiv \partial/\partial x^{\varphi'})$ in the holonomic case. Thus in any system $A^\varphi_\psi = \delta^\varphi_\psi$, the unity tensor. $A^{\varphi'}_\varphi A^{\mu'}_\mu A^\xi_{\xi'} \ldots$ is abbreviated $A^{\varphi'\mu'\xi}_{\varphi\mu\xi'} \ldots$. ∂_φ is defined as $A^{\varphi'}_\varphi \partial_{\varphi'}$ $((\varphi')$ holonomic). [ ] and ( ) around any set of indices of the same type indicate the alternating and symmetric parts, resp. [|] indicates that the index (indices) inside the | | is (are) not alternated with the others. $[\,]$ and $[\,|\,|\,]$ will also be used to keep distinct "interlocking" alternators.

can now define the p-vector covariant derivative of a q-vector $v^{\psi_1 \cdots \psi_q}$ in the natural way,

$$\nabla_{\Phi_p} v^{\Psi_q} \equiv \nabla^{p}_{[\varphi_1 \ldots \varphi_p]} v^{\psi_1 \cdots \psi_q} \quad [p, q = 0, 1, \ldots, n] \tag{1.2}$$

where we must define specially $v^{\Phi_0} = v$, an invariant, and 0-vector ("scalar") differentiation $\nabla_{\Phi_0} = \nabla$ is the identity operation. Φ_p and Ψ_q are short for the set of p- and q-vector indices $\varphi_1 \ldots \varphi_p$ and $\psi_1 \ldots \psi_q$ resp. Thus Φ_p is defined by giving the combination $\{\varphi_1 \ldots \varphi_p\}$ of the integers $1, \ldots, n$, p at a time, in some definite order modulo an even permutation. It can thus be compactly written $[\varphi_1 \ldots \varphi_p]$. $\nabla^{p}_{[\varphi_1 \ldots \varphi_p]}$ signifies the alternating part of the p-th covariant derivative. ∇_{Φ_p} is linear of course.

Now restricting ourselves to a symmetric connection, the p-vector derivative, like the classical 1-vector derivative, depends on v^{Ψ} and $\partial_q v^{\Psi}$ but on *no higher derivatives*. Namely

$$\nabla_{\Phi_p} v^{\Psi_q} = \begin{cases} \Gamma^{\Psi_q}_{[\Phi_{p-1}|\Pi_q|} \nabla_{\varphi_p]} v^{\Pi_q} & [p \text{ odd}] \\ \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q} v^{\Pi_q} & [p \text{ even}] \end{cases} \tag{1.3}$$

for certain tensors $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q}$ [p even] as will be shown presently. The analogy of p- with 1-vector differentiation is more clearly shown if we write (1.3) as

$$\nabla_{\Phi_p} v^{\Psi_q} = (d^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q} + \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q}) v^{\Pi_q} \tag{1.3}'$$

where $d^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q}$ is the linear differential operator and $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q}$ the connection quantity given by

$$\begin{cases} \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q} \equiv \Gamma^{\Psi_q}_{[\Phi_{p-1} \cdot]_q} \Gamma^{\cdot]_q}_{q_p] \Pi_q} & [p \text{ odd}] \\ d^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q} \equiv \Gamma^{\Psi_q}_{[\Phi_{p-1}|\Pi_q|} \partial_{\varphi_p]}, \quad [p \text{ odd}]; \qquad d^{\Psi_q}_{\Phi_p \Pi_q} = 0 \quad [p \text{ even}]. \end{cases} \tag{1.3}''$$

Equation (1.3) is verified as follows. For $p = 0$, it is true with

$$\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_0 \Pi_q} \equiv \Gamma^{\Psi_q}_{\Pi_q} = A^{\Psi_q}_{\Pi_q} \equiv A^{[\psi_1 \cdots \psi_q]}_{[\pi_1 \ldots \pi_q]}$$

and

$$A^{\Psi_0}_{\Pi_0} = 1.$$

For $p = 1$, it is true identically. Moreover

$$\begin{cases} \nabla_{\varphi} v^{\Pi_q} = \partial_{\varphi} v^{\Pi_q} + \Gamma^{\Pi_q}_{\varphi \cdot]_q} v^{\cdot]_q} & \text{with} \\ \Gamma^{\Pi_q}_{\varphi \Lambda_q} \equiv q\, A^{[\pi_1 \ldots \pi_{q-1}}_{[\lambda_1 \ldots \lambda_{q-1}} \Gamma^{\pi_q]}_{|\varphi| \lambda_q]}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Hence for $p = 2$, it is true with

$$\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_2 \Pi_q} \equiv q\, A^{[\psi_1 \ldots \psi_{q-1}}_{[\pi_1 \ldots \pi_{q-1}} \Gamma^{\psi_q]}_{|\Phi_2| \pi_q]} \tag{1.5}$$

and

$$\Gamma^{\psi}_{\Phi_2 \pi} \equiv -\tfrac{1}{2} R^{\psi}_{\varphi_1 \varphi_2 \pi} \quad \text{where}$$

$$R^{\psi}_{\varphi_1 \varphi_2 \pi} \equiv -2 \partial_{[\varphi_1} \Gamma^{\psi}_{\varphi_2] \pi} - 2 \Gamma^{\psi}_{[\varphi_1 | \lambda|} \Gamma^{\lambda}_{\varphi_2] \pi}, \tag{1.5}'$$

the ordinary curvature tensor, by the rule for the commutation of ordinary covariant differentiation. For $p = 3$, using $\Gamma_{q_1 q_2 q_3} = \Gamma_{(q_1}(\Gamma_{q_2 q_3)})$ and the Leibniz rule for ordinary covariant differentiation,

$$(1.6) \qquad \begin{cases} \nabla_{\Phi_3} v^{\Psi_q} = \nabla_{[\varphi_1} \Gamma^{\Psi_q}_{\varphi_2 \varphi_3] \Lambda_q} v^{\Lambda_q} + \Gamma^{\Psi_q}_{[\varphi_2 \varphi_3 | \Lambda_q |} \nabla_{\varphi_1]} v^{\Lambda_q} \\ \qquad\qquad = \Gamma^{\Psi_q}_{[\varphi_1 \varphi_2 | \Lambda_q |} \nabla_{\varphi_3]} v^{\Lambda_q} \end{cases}$$

by the identity

$$(1.6)' \qquad \nabla_{[\varphi_1} \Gamma^{\Psi_q}_{\varphi_2 \varphi_3] \Lambda_q} = 0$$

following from the Bianchi identity in view of (1.5), (1.5)', and the assumed symmetry of the connection. The cases $p \geqq 4$ now involve nothing new, and the form (1.3) for $\nabla_{\Phi_p} v^{\Psi_q}$ is seen to be obtained. Thereby the $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_{2j} \Pi_q}$ are given by

$$\Gamma^{\Psi_q}_{\Pi_q} = A^{\Psi_q}_{\Pi_q} \qquad [j = 0]$$

$$(1.7) \qquad \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_{2j} \Pi_q} = \Gamma^{\Psi_q}_{[\varphi_1 \varphi_2 | \Lambda^{(1)}_q |} \Gamma^{\Lambda^{(1)}_q}_{\varphi_3 \varphi_4 | \Lambda^{(2)}_q |} \dots \Gamma^{\Lambda^{(j-1)}_q}_{\varphi_{2j-1} \varphi_{2j}] \Pi_q} \qquad [j \geqq 1]$$

with $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_2 \Pi_q}$ given by (1.5) and (1.5)'. All these $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_{2j} \Pi_q}$ satisfy the Bianchi identity

$$(1.8) \qquad \nabla_{[\Psi} \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_{2j}] \Pi_q} = 0.$$

And now definitions analogous to (1.2) serve to define $\nabla_{\Phi_p} v_{\Psi_q}$ and the differentiation of tensors with p-vector indices of any valence. The corresponding formulae are evident in view of those already given. The Leibniz rule for product differentiation has the p-vector analogue

$$(1.9) \qquad \nabla_{\Phi_p}(T^{\Psi} S^{\Pi}) = \sum_{q=0}^{p} {}^{p}\Theta^{q} \nabla_{[\Phi_p} T^{\Psi} \nabla_{\Phi_{p-q}]} S^{\Pi}$$

(correspondingly for other index positions and valences) where the coefficients are given by

$$(1.9)' \qquad {}^{p}\Theta^{q} = (-1)^{q(p-q)} {}^{p}\Theta^{p-q} \equiv (-1)^{q} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots j_q = \{1, \dots p\} \\ j_1 < j_2 < \cdots < j_q}} (-1)^{j_1} (-1)^{j_2} \dots (-1)^{j_q}$$

of which the first few are

$$(1.9)'' \qquad {}^{p}\Theta^{0} = +1, \qquad {}^{p}\Theta^{1} = p \pmod 2, \qquad {}^{p}\Theta^{2} = \tfrac{1}{2}\{p + p \pmod 2\}, \dots .$$

This allows, as usual, the derivation of the derivatives of higher valence tensors in terms of those of scalars and vectors alone.

II. The space S_{2^n}.

The foregoing suggests the introduction of the local $(2^n - 1)$-dimensional projective spaces S_{2^n} whose points V^{Φ} are ordered collections of (contravariant) p-vectors: $\{v, v^{\varphi}, v^{\varphi_1 \varphi_2}, \dots v^{\varphi_1 \cdots \varphi_n}\}$ running through the 2^n combinations $\varphi_1 \dots \varphi_p$ $[p = 0, 1, \dots, n]$. A (holonomic or non-holonomic) change of system

$(\varphi)\to(\varphi')$ in the base space induces the change of system $(\Phi)\to(\Phi')$ in S_{2^n} in which

$$V^{\Phi'} = A^{\Phi'}_{\Phi}(x^\mu)\, V^{\Phi} \quad [A^{\Phi'_p}_{\Phi_r} \equiv \delta^p_r\, A^{[\varphi'_1\ldots\varphi'_p]}_{\varphi_1\ldots\varphi_p},\ A^{\Phi'_0}_{\Phi_0} \equiv 1]. \tag{2.1}$$

Note that there are no "cross terms" in $A^{\Phi'}_{\Phi}$ linking the p-vector component $v^{\Phi'_p}$ of $V^{\Phi'}$ with its old r-vector components v^{Φ_r} for $r \neq p$. This peculiar situation obtains only between systems (Φ) such as are defined here in terms of the systems (φ) of the base space. These systems will be called *substratum* systems and designated generally by capital Greek letters (Π), (Φ), etc. A general transformation in S_{2^n}:

$$A^{A}_{\Phi}(x^\mu), \qquad [A = 1, \ldots, 2^n], \qquad \operatorname{Det} A^{A}_{\Phi} \neq 0,$$

abolishes this segregation.

If the base space is linearly connected, a linear connection is induced in S_{2^n}. Moreover, the notion of p-vector covariant differentiation provides the natural extension of the range of the differentiation index to the dimension of the space. We define

$$\nabla_\Phi V^\Psi \equiv \nabla_\Phi v^\Psi \quad [(\Psi) \text{ substratum}]. \tag{2.2}$$

Then by (1.3)′ this can be written in the form

$$\nabla_\Phi V^\Psi = (d^{\Psi}_{\Phi\Pi} + \Gamma^{\Psi}_{\Phi\Pi})\, V^\Pi. \tag{2.2}'$$

Comparing with (1.3)′, we get

$$d^{\Psi_q}_{\Phi\Pi_r} = \delta^q_r\, d^{\Psi_q}_{\Phi\Pi_q}, \qquad \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi\Pi_r} = \delta^q_r\, \Gamma^{\Psi_q}_{\Phi\Pi_q} \quad [(\Psi) \text{ substratum}]. \tag{2.3}$$

When now we require the covariant derivative $\nabla_P V^A = A^\Phi_P \nabla_\Phi V^A$ to be of the form (2.2)′ in any system (A) in S_{2^n}, the usual procedure, expressing the covariance of the right member, gives us the new connection components $\Gamma^B_{PA} \equiv A^\Phi_P \Gamma^B_{\Phi A}$:

$$0 = A^\Phi_P \{d^{\Psi}_{\Phi\Pi} A^\Pi_A + \Gamma^{\Psi}_{\Phi\Pi} A^\Pi_A - A^\Psi_B \Gamma^B_{\Phi A}\}. \tag{2.4}$$

Curvature: Classically, the alternating part of the second covariant derivative of a vector is linear in the components of the vector; the coefficients then define the curvature tensor:

$$2!\, \nabla^2_{[\pi\varrho]} v^\psi \equiv - R^\psi_{\pi\varrho\lambda} v^\lambda.$$

The alternating part of iterated covariant p-vector differentiation will also serve us to define the curvature with respect to the S_{2^n}. First we note that by definition

$$\nabla_{[\Pi_p}(\nabla_{\Phi_q]} V^\Psi) = \nabla_{\Lambda_{p+q}} V^\Psi \quad [\Lambda_{p+q} \equiv [\Pi_p \Phi_q]]. \tag{2.5}$$

Referring to (1.3), we see that only in the case $p+q$ even is the operator $\nabla_{\Lambda_{p+q}}$ necessarily independent of ∂_φ. Accordingly, we can define these components of the curvature tensor by:

$$(p+q)!\, \nabla_{[\Pi_p}(\nabla_{\Phi_q]} V^\Psi) \equiv - N^\Psi_{\Lambda_{p+q}\Omega} V^\Omega \quad [\Lambda_{p+q} \equiv [\Pi_p \Phi_q]]. \tag{2.6}$$

By (2.5) then,

$$N^{\Psi}_{\Lambda_{2j}\Omega} \equiv -(2j)!\, \Gamma^{\Psi}_{\Lambda_{2j}\Omega} \quad [0 \leqq j] \tag{2.7}$$

so that we get no new differential invariants – the curvature tensor is already comprised in our linear connection. Curvature is thus seen to be essentially a tensor bearing three p-vector indices, of which the first is an even p-vector. The classical case is that of one 2-vector and two 1-vector indices. Completing the definition by putting, say,

$$N^{\Psi}_{\Lambda_{2j+1}\Omega} = 0 \quad [0 \leqq j] \tag{2.7}'$$

we have the curvature tensor defined in a substratum system and hence in any system (A) in S_{2^n}.

Abstractly considered, the $2^n + 1$ p-vector derivative operators $a_{\Pi} \leftrightarrow V_{\Pi}$ (adjoining $a_0 \leftrightarrow V_0 \cdot = \cdot$ multiplication by zero) under the multiplication $a_{\Pi} \cdot a_{\Phi}$ defined by alternated iteration $V_{\Pi}(V_{\Phi})$ form a non-commutative finite linear associative algebra. All non-zero elements are of the form $a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \cdots \cdot a_n^{j_n}$ $[j_i = 0 \text{ or } 1]$ and the multiplication law results from the law for the a_{ψ}, namely

$$a_{\pi} \cdot a_{\varphi} = -a_{\varphi} \cdot a_{\pi} \quad [\pi, \varphi = 1, \ldots, n]. \tag{2.8}$$

Substituting the expressions $\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_2 \Pi_q}$ given by (1.5) into (1.7) we arrive at the decomposition of $\Gamma^{\Psi}_{\Phi_{2j}\Pi}$ given by [2])

$$\Gamma^{\Psi_q}_{\Phi_{2j}\Pi_r} = \delta^q_r \left\{ q^j A^{[\Psi_{q-1}}_{[\cdots[\Pi_{q-1}} \Gamma^{\Psi_q]}_{[\varphi_1\varphi_2|\lambda_1|} \Gamma^{\lambda_1}_{\varphi_3\varphi_4|\lambda_2|]} \cdots \Gamma^{\lambda_{j-1}}_{\varphi_{2j-1}\varphi_{2j}]\pi_q]} \right\} \tag{2.9}$$

$$[(\Pi) \text{ substratum}].$$

The ordinary curvature ($\propto \Gamma^{\Psi}_{\Phi_2 \pi}$) of the base space thus generates the curvature associated with the S_{2^n}. Accordingly, the condition $N^{\Psi}_{1\Omega} = 0$ is seen to be equivalent to $R^{\Psi}_{1_2 \omega} = 0$ whose geometrical meaning in the affine case is that the base space is a flat affine space and in the projective case (with the condition $\Gamma^{\Psi}_{\varphi\pi} x^{\pi} = A^{\Psi}_{\varphi}$ adjoined) that the base space is a flat projective space[3]). Quadric in S_{2^n}: The existence of a non-singular quadric $g_{\mu\varrho}$ in the local spaces of the base space induces a non-singular quadric in the local spaces S_{2^n} in the obvious way

$$S_{\Phi_p \Psi_r} \equiv \delta^p_r\, g_{[\varphi_1[\psi_1} g_{|\varphi_2|\psi_2|} \cdots g_{|\varphi_p|]\psi_p]}, \quad S_{\Phi_0 \Psi_0} \equiv 1. \tag{2.10}$$

In the affine case, with the quadric as metric, the affine space becomes Riemannian; in the projective case, the projective space becomes the generalized conformal space K_{n-2}[4]) with fundamental quadric $g_{\mu\varrho}$.

If indices are raised and lowered with $g_{\mu\varrho}$ in the base space, they are raised and lowered with $S_{\Phi\Psi}$ in S_{2^n}. (Geometrically, V_{Φ} is polar to V^{Φ} in the quadric

$$S_{\Phi\Psi} W^{\Phi} W^{\Psi} = 0$$

[2]) The notation means that Π_{q-1} is alternated separately with each of the j indices $\lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}$ and π_q, while the φ's are alternated by themselves.

[3]) Schouten, J., and J. Haantjes: Comp. Math. **3**, 20 (1936).

[4]) Ingraham, R.: Proc. Nat. Acad. Sci. **38**, 921, (1952); Nuovo Cimento **9**, 886 (1952).

if its component p-vectors are polar to the corresponding p-vectors of V^Φ in the quadric

$$g_{\varphi\psi} w^\varphi w^\psi = 0 \qquad \text{and conversely.)}$$

If the connection in the base space fixes the quadric: $\nabla_\pi g_{\varphi\psi} = 0$, then the connection of the S_{2^n} fixes the quadric in S_{2^n}: $\nabla_\Pi S_{\Phi\Psi} = 0$ and conversely. (In this case $\Gamma^\Psi_{\varphi\pi} = \{{}^\psi_{\varphi\pi}\}_g$, the Christoffel symbols of $g_{\varphi\psi}$ and $\Gamma^\Psi_{\Pi\Phi}$ is built out of these.) Further parallels are too numerous to be dealt with here.

III. S_{2^n} as Space of Spin-Collineations.

We want now to consider an especially interesting transformation $(\Phi) \to (A)$ in S_{2^n} for the case n even ($n = 2\nu$), where (Φ) is a substratum system and (A) is now to be defined.

The local spin-spaces[5]) associated with the local (affine or projective) spaces of the base space, provided with quadric $g_{\mu\varrho}$, are complex projective spaces $P^*_{2^\nu - 1}$ in which are given n (normalized) involutions $\eta^\varrho{}_{a}{}^{a}{}_{b}$ $[a, b = 1, \ldots, 2^\nu]$ or simply η^ϱ in matrix notation satisfying

$$\eta^{(\mu}\eta^{\varrho)} = g^{\mu\varrho} B \qquad \text{[matrix multiplication]} \tag{3.1}$$

$B\,(= B^a_b)$ the unity tensor of spin space. Let now $A = ({}^{a_1}{}_{a_2})$ stand for a set of collineation indices; then A runs through $(2^\nu)^2 = 2^n$ elements. Defining

$$\eta^{\Phi_0}_A \equiv B^{a_2}_{a_1}, \qquad \eta^{\Phi_p}_A \equiv \eta^{[\varphi_1}{}_{a_1}{}^{a}{}_{c_1}\, \eta^{\varphi_2}{}_{c_1}{}^{c}{}_{c_2} \ldots \eta^{\varphi_p]}{}_{c_{p-1}}{}^{c}{}_{a_2} \tag{3.2}$$

and setting $A^\Phi_A \equiv \eta^\Phi_A$, then the inverse exists, and is given by

$$A^A_{\Phi_p} = (-1)\,(\tfrac{p}{2})!/2^\nu\, \eta^A_{\Phi_p} \qquad [p = 0, 1, \ldots, n] \tag{3.3}$$

where Φ in η_Φ is lowered with $S_{\Phi\Psi}$ and for any T and $A = ({}^{a_1}{}_{a_2})$, $T^A = T^{a_2}{}_{a_1}$. This theorem, which we write in the form

$$A^A_\Phi A^\Psi_A = A^\Psi_\Phi \tag{3.4}$$

merely states that every element except the identity of the Clifford algebra defined by (3.1) has vanishing trace[6]). Thus $A^\Phi_A = \eta^\Phi_A$ defines an admissible transformation in S_{2^n}. Then the formula

$$V^A = A^A_\Phi V^\Phi \tag{3.5}$$

exhibits a 1—1 mapping of ordered collections of p-vectors onto collineations in spin-space. (This fact was noted by Givens, ref. 5, Chap. 8, § 2.) S_{2^n} is thus nothing else than the space of spin-collineations.

The introduction of a fundamental quadric and linear connection into spin-collineation space is thus a fait accompli. The quadric is

$$S_{AB} = A^{\Phi\Psi}_{AB} S_{\Phi\Psi}. \tag{3.6}$$

[5]) VEBLEN, O., and J. GIVENS: Geometry of Complex Domains, lectures given at the Inst. for Advanced Study, Chap. 5. 1935/36.

[6]) VEBLEN, O., and J. GIVENS: Geometry of Complex Domains, lectures given at the Inst. for Advanced Study, Chap. 8, § 2. 1935/36.

The spin-collineation derivative of spin-collineations is given by (2.2)′ with indices $P, A, B, \ldots$ etc., where the spin-collineation linear connection Γ^B_{PA} transforms according to (2.4). By extending the range of the differentiation index from n to 2^n we have effectively defined the covariant derivative of a spin-collineation *with respect to a spin-collineation* [in the precise sense that ∇_P bears a collineation index and these 2^n operators ∇_P are in general linearly independent:

$$C^P \nabla_P V^A = 0$$

for all V^A only if all $C^P = 0$. This last is evident from (1.3) and (1.7[7])]. The spin-collineation curvature has been defined: (2.7), (2.7)′.

The transformation rule (2.4) for $\Phi = \varphi$, $\Psi = \psi$ gives by (3.2)

$$\nabla_\varphi A^\psi_A \equiv \nabla_\varphi \eta^\psi_A = 0 \tag{3.7}$$

so that the spin-collineation connection automatically fixes the family of involutions η^ψ_A. (The discovery of a *vector* connection in spin-space which does this is of course a different problem.)

Due to the very special nature of the system (A) [arising from equation (3.1)], it has special properties not shared by a general system. Let us choose (a) in spin-space and (q) (non-holonomic) in the base space *canonically* related, i.e., such that the η^q are certain canonical constant matrices over the manifold. [The possibility of doing this is the fundamental theorem of spin-space[8]).] By (3.1) $g_{\mu\varrho}$ is then constant. Then it follows that the A^Φ_A and A^A_Φ are constants, so that the solution of (2.4) for the spin-collineation connection is simply

$$\Gamma^B_{PA} = A^{\Phi\Pi B}_{PA\Psi}\, \Gamma^\Psi_{\Phi\Pi} \quad [(a) \text{ can. } (\varphi)] \tag{3.8}$$

which may be reduced out in terms of the basic $\Gamma^\psi_{q\pi}$ and $\Gamma^\psi_{\varphi_1\varphi_2\pi}$.

---

[7]) The affine case is meant here; the statement requires modification in the projective case due to the identity $x^\mu c_\mu v = 0$ for any v homogeneous of degree zero. Its truth in the affine case can be seen by considering, e.g., the case of constant non-zero curvature

$$\Gamma_{\Phi_2 \pi\psi} = K\,(g_{[\varphi_1|\pi|}\, g_{\varphi_2]\psi}) \equiv K\, S_{\Phi_2 A_2}, \qquad A_2 \equiv [\pi\psi].$$

Then it follows from (2.9) that more generally for $j \geq 1$,

$$\Gamma_{\Phi_{2j}\Pi_j\Psi_j} = j\, K^j\, S_{\Phi_{2j} A_{2j}}, \qquad A_{2j} \equiv [\Pi_j \Psi_j]$$

so that the linear independence of the 2^n operators ∇_Φ follows from the non-singularity of $S_{\Phi\Psi}$, which means

$$\operatorname{Det} S_{\Phi_p \Psi_p} \neq 0 \; [p = 0, 1, \ldots, n].$$

A notable case of linear dependence is the flat case ($K = 0$) in which only the scalar and vector derivatives are linearly independent.

[8]) Schouten, J.: Proc., Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam **52**, 179 (1949).

Institute for Advanced Study, Princeton N.J., U.S.A.

(Eingegangen am 21. Oktober 1952).

GROTEMEYER, K. P.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 272—280 (1953)

Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschattengrenze ist.

Von
K. P. GROTEMEYER.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat Herr E. REMBS [1] eine Vermutung von Herrn W. SÜSS bewiesen, daß beschränkte, konvexe Flächen, die berandet werden von einer geschlossenen Eigenschattengrenzkurve, infinitesimal starr sind, wenn die Randkurve bei der infinitesimalen Verbiegung Eigenschattengrenze bleibt. Im ersten Teil der vorliegenden Note soll ein neuer, einfacher Beweis für diesen Satz erbracht werden. Weiter wird gezeigt, daß konvexe Flächen, deren Rand Eigenschattengrenze ist, gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr sind, die die Bogenlängen der sphärischen Bilder der Randkurven stationär lassen. Im nächsten Teil werden die endlichen Verbiegungen der vorliegenden Flächenklasse untersucht. Auch hier läßt sich zeigen, daß die Flächen der betrachteten Klasse gegenüber endlichen Verbiegungen starr sind, wenn die Randkurve beim Verbiegungsprozeß Eigenschattengrenze bleibt. Zum Abschluß sei dann noch die endliche Verbiegung eines konvexen Flächenstückes betrachtet, welches von zwei sich nicht schneidenden Kurven berandet wird. Längs der einen Randkurve sei der Normalenvektor der Fläche konstant (d.h. längs dieser Kurve verschwindet die GAUSSsche und die Normalkrümmung). Die Fläche berührt also längs dieser Kurve eine feste Ebene. Ist jetzt etwa die andere Randkurve Eigenschattengrenze bei Beleuchtung senkrecht zu der festen Ebene der ersten Randkurve, so ist dieses Flächenstück bei endlichen Verbiegungen starr, wenn nur die zweite Randkurve Eigenschattengrenze bleibt. Für die Starrheitsaussage spielt also nur die Eigenschaft der zweiten Randkurve eine Rolle.

Die Bezeichnungsweise ist einer früheren Arbeit entnommen [4].

1. Die natürliche Gleichung für den Flächenstreifen längs einer Eigenschattengrenze.

Es sei e ein konstanter Einheitsvektor, der die Lichtrichtung bei der Beleuchtung eines Flächenstückes angeben möge. Längs einer Eigenschattengrenzkurve muß dann gelten:

$$(1) \qquad (e\,\xi) = 0 \quad \text{und abgeleitet} \quad (e\,\dot{\xi}) = 0.$$

Da in einem nicht parabolischen Flächenpunkt die Vektoren $\xi, \dot{\xi}$ linear unabhängig sind, so folgt für die Punkte mit $K \neq 0$ auf einer Eigenschattengrenze:

$$e = \frac{[\xi\,\dot{\xi}]}{|\dot{\xi}|}.$$

Unter Benutzung der Ableitungsgleichung[1]) für $\dot{\xi}$ erhalten wir:

$$\mathfrak{e} = \frac{a\,\dot{\xi} + b\,\eta}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{2}$$

Führen wir noch den Winkel Θ ein:

$$\cos\Theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \qquad \sin\Theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{3a}$$

so läßt sich die Gl. (2) so schreiben:

$$\mathfrak{e} = \cos\Theta\,\dot{\xi} + \sin\Theta\cdot\eta. \tag{3}$$

Aus der Bedingung $\mathfrak{e} = \text{const}$ oder $\dot{\mathfrak{e}} = 0$ folgt unter Anwendung der Ableitungsgleichungen für einen Flächenstreifen die gesuchte „natürliche Gleichung" für den Flächenstreifen einer Eigenschattengrenze:

$$c + \dot{\Theta} = 0 \tag{4}$$

oder

$$c + \frac{d}{ds}\left\{\operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{a}{b}\right)\right\} = 0. \tag{5}$$

Man erkennt auch unmittelbar, daß der Flächenstreifen einer Eigenschattengrenze zylindrisch ist. Auf Flächen mit positiver Gaussscher Krümmung sind die Eigenschaften einer Kurve, Eigenschattengrenze zu sein oder einen zylindrischen Flächenstreifen zu besitzen, äquivalent.

Da wir weiterhin nur Flächen betrachten, die durchweg positive Gausssche Krümmung besitzen[2]), so läßt es sich stets so einrichten, daß die zweite Fundamentalform an diesen Stellen positiv definit wird. Die Normalkrümmung $b(s)$ ist dann stets negativ. Dann läßt sich aber der Winkel Θ wegen (3a) so wählen, daß

$$0 \leq -\Theta \leq \pi. \tag{6}$$

In den Abschnitten 2., 3. und 4. betrachten wir beschränkte, dreimal stetig differenzierbare Flächen mit positiver Gaussscher Krümmung, die von einer geschlossenen, zweimal stetig differenzierbaren Eigenschattengrenze berandet werden. Wenn $\mathfrak{e}$ die Lichtrichtung ist, so verschwindet die Funktion $(\mathfrak{e}\,\xi)$ auf dem Rande des vorliegenden Flächenstückes und ändert auf demselben nirgends das Vorzeichen. Bei der obigen Wahl des Zeichens von $\mathfrak{e}$ gilt:

$$(\mathfrak{e}\,\xi) \geqq 0. \tag{7}^{3})$$

Da die zweite Fundamentalform nicht negativ definit sein soll, so weist der Vektor ξ in das Innere der kleinsten konvexen Hülle.

[1]) Vgl. W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie Bd. I, 4. Aufl., S. 67ff.; desgleichen [4] S. 255.

[2]) Wenigstens längs der betrachteten Eigenschattengrenze.

[3]) Das sphärische Bild der vorliegenden Flächen ist bekanntlich genau die Halbkugel. $\mathfrak{e}$ ist der Stellungsvektor der Randebene dieser Halbkugel.

2. Die infinitesimale Verbiegung konvexer Flächen, deren Rand Eigenschattengrenze bleiben soll[4]).

Es sei $\mathfrak{y}$ der Drehriß der genannten Fläche: $\mathfrak{y}_i = \alpha_i^K \mathfrak{x}_K$. Weiter gilt der vektorielle Integralsatz:

$$\iint ||\alpha_i^K|| \, \xi \, do = \tfrac{1}{2} \oint [\mathfrak{y} \dot{\mathfrak{y}}] \, ds. \tag{8}$$

Der Vektor $\dot{\mathfrak{y}}$ läßt sich so darstellen:

$$\dot{\mathfrak{y}} = \delta a \, \dot{\mathfrak{x}} + \delta b \, \eta. \tag{9}^{5}$$

Die skalare Multiplikation von (8) mit dem Vektor $\mathfrak{e}$ liefert nach (2):

$$\iint ||\alpha_i^K|| \, (\mathfrak{e}\,\xi) \, do = \frac{1}{2} \oint \delta\left(\frac{a}{b}\right) \frac{b^2 \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \, ds. \tag{10}$$

Es gilt nämlich: (nach (2) und (9))

$$[\dot{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{e}] = \frac{\delta a \cdot b - \delta b \cdot a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \xi \quad \text{also} \quad (\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{e}) = \frac{\delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \varphi \, b^2.$$

Hier ist $\varphi = (\mathfrak{y}\,\xi)$ die WEINGARTENsche Funktion.

Soll nun während der infinitesimalen Verbiegung der Rand Eigenschattengrenze bleiben, so ist die Gleichung (5) auch für die „verbogene Fläche" gültig. Andererseits ist aber für jede infinitesimale Verbiegung $\delta c \equiv 0$ ([5] Gl. (27)). Nach dem Gesagten gilt dann für die Verbiegungen, die die Eigenschaft der Randkurve, Eigenschattengrenze zu sein, erhalten:

$$\delta\left\{arc\,cotg\left(\frac{a}{b}\right)\right\} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \delta\left(\frac{a}{b}\right) = 0. \tag{11}$$

Wegen (10) ist dann:

$$\iint ||\alpha_i^K|| \, (\mathfrak{e}\,\xi) \, do = 0.$$

Da ein Vorzeichenwechsel und das identische Verschwinden von $(\mathfrak{e}\,\xi)$ ausgeschlossen ist, so folgt, da wegen $K > 0$ $||\alpha_i^K|| \leqq 0$ ist:

$$||\alpha_i^K|| = 0.$$

Daraus ergibt sich die Starrheitsaussage $\alpha_i^K = 0$. Wir formulieren das gewonnene Ergebnis in dem

Satz 1: *Ein beschränktes, dreimal stetig differenzierbares Flächenstück mit $K > 0$, welches von einer geschlossenen Eigenschattengrenze berandet wird, ist gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr, die die Eigenschaft der Randkurve, Eigenschattengrenze zu sein, nicht ändern.*

---

[4]) Eine ausführliche Darstellung der infinitesimalen Verbiegung in der hier benutzten Bezeichnungsweise findet sich in [5]. Hier findet sich auch die Herleitung des Integralsatzes (8).

[5]) δa und δb sind die „Variationen" der geodätischen Torsion und Normalkrümmung längs der betrachteten Kurve bei der infinitesimalen Verbiegung, d.h. bei der Variation des Flächenstückes unter der Nebenbedingung $\delta g_{iK} = 0$. (g_{iK}: metrischer Fundamentaltensor.) Vgl. [5].

Nach früher Bemerktem läßt sich also ein Flächenstück mit $K > 0$, welches von einem zylindrischen Randstreifen berandet wird, nicht infinitesimal verbiegen, so daß der Randstreifen zylindrisch bleibt. (Abgesehen natürlich von der infinitesimalen Bewegung.)

Die Gültigkeit des Satzes wurde kürzlich von Herrn E. Rembs, angeregt durch eine Vermutung von Herrn W. Süss, nachgewiesen [1]. Herr Rembs benutzt die bekannte Integralformel von Herrn W. Blaschke und wendet dann einige Sätze über die Eigenschaften der Komponenten des Drehrisses $\mathfrak{y}$ an, die er an anderer Stelle hergeleitet hat [2].

3. Die infinitesimale Verbiegung einer konvexen Fläche, deren Rand Eigenschattengrenze ist, bei stationärer Bogenlänge des sphärischen Bildes der Randkurve.

Wir wenden jetzt eine Integralformel, die wohl von E. Rembs zuerst angegeben ist [2] (allerdings in etwas anderer Form, als sie hier benutzt wird) auf die Flächen der vorgelegten Klasse an. Diese Formel lautet:

$$\iint ||\alpha_i^K||\, S\, do = \oint (\mathfrak{e}\, \dot{\mathfrak{y}})\, (\mathfrak{e}\, \overline{\mathfrak{y}})\, ds. \tag{12}$$ [6])

Darin ist $S = (\hat{\mathfrak{x}}\ \xi)$ mit $\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \mathfrak{e}(\mathfrak{e}\, \mathfrak{x})$ d.h. $\hat{\mathfrak{x}}$ ist der in die Richtung $\mathfrak{e}$ „projizierte Ortsvektor" des Flächenstückes. $\overline{\mathfrak{y}}$ ist der Sauersche Verschiebungsriß ([3] und [5]). Wegen (2) geht das Randintegral von (12) über in:

$$\iint ||\alpha_i^K||\, S\, do = \oint \frac{a\, \delta a + b\, \delta b}{|a^2 + b^2|}\, (\mathfrak{e}\, \overline{\mathfrak{y}})\, ds$$

oder

$$\iint ||\alpha_i^K||\, S\, do = \oint \delta\, |\sqrt{a^2 + b^2}|\, (\mathfrak{e}\, \overline{\mathfrak{y}})\, ds. \tag{13}$$

Weiter überzeugt man sich leicht, daß die Funktion

$$S = (\mathfrak{x}\, \xi) - (\mathfrak{e}\, \mathfrak{x})\, (\mathfrak{e}\, \xi)$$

bei geeigneter Wahl des Nullpunktes des Koordinatensystems das Vorzeichen nicht ändert. Legen wir etwa den Ursprung des Koordinatensystems in den Flächenpunkt, indem die Tangentialebene den Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ besitzt. (Da das sphärische Bild der Fläche genau eine Halbkugel ist, und die Randebene dieser Halbkugel den Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ besitzt, so ist der genannte Flächenpunkt eindeutig bestimmt.) Die Fläche liegt dann ganz auf einer Seite dieser Tangentialebene und es ist: $(\mathfrak{e}\, \mathfrak{x}) \geqq 0$. Weiter ist $(\mathfrak{x}\, \xi) \leqq 0$, weil ξ in das Innere der kleinsten konvexen Hülle weist. Nach (7) ist endlich noch $(\mathfrak{e}\, \xi) \geqq 0$. Daher

$$S \leqq 0.$$

Wenn nun $|\sqrt{a^2 + b^2}$ am Rande der Fläche während des Verbiegungsprozesses stationär bleibt (d.h. $\delta |\sqrt{a^2 + b^2}$ muß am Rand verschwinden), so folgt wieder

$$\iint ||\alpha_i^K||\, S\, do = 0.$$

[6]) Man vgl. [5] Gl. (16).

Daraus folgt dann aber wie unter 2. das Verschwinden von $||\alpha_i^K||$. Da $K > 0$ ist, liefert $||\alpha_i^K|| = 0$ die Starrheitsaussage. Nun ist $\sigma(s) = \int_0^s \sqrt{a^2 + b^2}\, ds$ die Bogenlänge des sphärischen Bildes der Randkurve. Wenn $\delta\sigma = 0$, so folgt $\delta|\sqrt{a^2 + b^2}| = 0$. Somit haben wir den folgenden Satz gefunden:

Satz 2. *Ein beschränktes, dreimal stetig differenzierbares Flächenstück mit positiver* GAUSSscher *Krümmung, welches von einer geschlossenen Eigenschattengrenze berandet wird, ist gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr, die die Bogenlänge des sphärischen Bildes der Randkurve stationär lassen.*

Aus der beim Beweis des Satzes 1 angewandten Integralformel (10) erkennt man, daß die konvexen Flächen, die von einer geschlossenen Eigenschattengrenze berandet werden, gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen starr sind, die eine „charakteristische Funktion" φ besitzen, die am Rande verschwindet. Nach dieser Feststellung können wir die gleichen Folgerungen ziehen, wie sie im Anschluß an den Satz 3 der Arbeit [5] angestellt wurden.

4. Die endliche Verbiegung konvexer Flächen, deren Rand Eigenschattengrenze bleiben soll.

Als wichtigstes Hilfsmittel verwenden wir die in [4] [7]) hergeleitete Integralformel mit vektoriellen Integranden:

$$\iint \frac{||A_{iK}||}{g}\, \xi\, do = -\oint A^{iK}\, n_i\, \mathfrak{x}_K\, ds\,.$$

In [6] ist gezeigt worden, daß sich der Integrand des Randintegrals so schreiben läßt:

$$\iint \frac{||A_{iK}||}{g}\, \xi\, do = \oint \{(a - a^*)\, \dot{\xi} + (b - b^*)\, \eta\}\, ds\,. \tag{14}$$

Hier sind a^* und b^* die geod. Torsion und Normalkrümmung der zur vorliegenden isometrischen Fläche. $A_{iK} = B_{iK} - B_{iK}^*$ ist die Differenz der beiden zweiten Fundamentaltensoren der zueinander isometrischen Flächen. Wegen $K > 0$ läßt es sich so einrichten, daß beide Tensoren positiv definit werden. Dann ist $||A_{iK}|| \leqq 0$ und aus $||A_{iK}|| = 0$ folgt $A_{iK} = 0$, d.h. die Kongruenz oder Symmetrie der beiden isometrischen Flächen.

Es sei jetzt $\mathfrak{F}$ eine beschränkte, dreimal stetig differenzierbare Fläche mit $K > 0$, die von einer geschlossenen Eigenschattengrenze berandet wird. $\mathfrak{F}^*$ sei eine Fläche, die zu $\mathfrak{F}$ isometrisch ist. (Beide Flächen seien auf dasselbe, die Isometrie vermittelnde Parametersystem bezogen.) Ist weiter $\mathfrak{e}$ der in (2) definierte Vektor der Fläche $\mathfrak{F}$, so kann man, da nach (7) $(\mathfrak{e}\, \xi)$ das Zeichen nicht wechselt,

$$G(\mathfrak{F}) = \iint \frac{||A_{iK}||}{g}\, (\mathfrak{e}\, \xi)\, do$$

als „Gesamtmaß" für die Verbiegbarkeit der vorliegenden Fläche $\mathfrak{F}$ in eine beliebige zu $\mathfrak{F}$ isometrische Fläche $\mathfrak{F}^*$ bezeichnen. Aus dem Verschwinden

[7]) Vgl. [4], S. 260 (4).

von G folgt die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$. Im übrigen ist $G(\mathfrak{F})$ nie positiv. Nach (14) erhalten wir

$$G(\mathfrak{F}) = \oint \frac{(a - a^*)\, a + (b - b^*)\, b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, ds$$

oder

$$G(\mathfrak{F}) = \oint |\sqrt{a^2 + b^2}|\, ds - \oint \frac{a\, a^* + b\, b^*}{|\sqrt{a^2 + b^2}|}\, ds.$$

Weil das sphärische Bild des Randes von $\mathfrak{F}$ ein Großkreis ist, so ist

$$\oint |\sqrt{a^2 + b^2}|\, ds = \oint |\dot{\xi}|\, ds = 2\pi.$$

Wir führen noch die Größen

$$cos\, \Theta^* = \frac{a^*}{|\sqrt{a^{*2} + b^{*2}}|}; \qquad sin\, \Theta^* = \frac{b^*}{|\sqrt{a^{*2} + b^{*2}}|}$$

ein. ($\mathfrak{e}^* = cos\, \Theta^*\, \dot{\mathfrak{x}}^* + sin\, \Theta^*\, \eta^*$ ist der zu $\dot{\mathfrak{x}}^*$ konjugierte Vektor längs des Randes von $\mathfrak{F}^*$.) Wegen $K > 0$ können wir auch hier wieder den Winkel Θ^* auf das Intervall $0 \leqq -\Theta^* \leqq \pi$ beschränken. Mit $\sigma^*(s) = \int_0^s \sqrt{a^{*2} + b^{*2}}\, ds$ als Bogenlänge des sphärischen Bildes der Randkurve von $\mathfrak{F}^*$ erhalten wir endlich:

(15) $$G(\mathfrak{F}) = 2\pi - \oint cos\, (\Theta - \Theta^*)\, d\sigma^*.$$

Da der Rand von $\mathfrak{F}$ Eigenschattengrenze ist, so gilt:

(4) $$c + \dot{\Theta} = 0.$$

Nun sei auch der Rand von $\mathfrak{F}^*$ Eigenschattengrenze, d.h.

(16) $$c + \dot{\Theta}^* = 0.$$

(Als geodätische Krümmung ist c invariant gegenüber isometrischen Abbildungen.)

Aus den Gln. (4) und (16) folgt:

(17) $$\Theta - \Theta^* = \gamma = \text{const.}$$

Da der Rand von $\mathfrak{F}^*$ Eigenschattengrenze ist, so ist $\oint d\sigma^* = 2\pi$. Nach (17) und (15) ist dann

(18) $$G(\mathfrak{F}) = 2\pi\{1 - cos\, \gamma\}.$$

Bestimmen wir jetzt den Wert der Konstanten γ. Zunächst gelten die Gleichungen für die Randkurven:

$$\oint \dot{\mathfrak{x}}\, ds = 0 \quad \text{und} \quad \oint \dot{\mathfrak{x}}^*\, ds = 0.$$

Da $\mathfrak{F}^*$ von einer Eigenschattengrenze berandet wird, ist der Einheitsvektor

$$\mathfrak{e}^* = cos\, \Theta^*\, \dot{\mathfrak{x}}^* + sin\, \Theta^*\, \eta^* \qquad \text{konstant.}$$

Daher ist

$$\oint (e\,\dot{\mathfrak{x}})\,ds = 0; \qquad \oint (e^*\,\dot{\mathfrak{x}}^*)\,ds = 0$$

oder wegen

$$(e\,\dot{\mathfrak{x}}) = \cos\Theta; \qquad (e^*\,\dot{\mathfrak{x}}^*) = \cos\Theta^*:$$

$$\oint \{\cos\Theta - \cos\Theta^*\}\,ds = 0,$$

somit

$$\sin\frac{\gamma}{2}\oint \sin\frac{\Theta+\Theta^*}{2}\,ds = 0. \tag{19}$$

Daher sind zwei Fälle möglich:

$$1.\ \sin\frac{\gamma}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = 2l\pi \quad (l = \text{ganzzahlig}). \tag{20}$$

$$2.\ \oint \sin\frac{\Theta+\Theta^*}{2}\,ds = 0.$$

Wegen $0 \leqq -\Theta \leqq \pi$ und $0 \leqq -\Theta^* \leqq \pi$ liefert

$$0 \leqq -\frac{\Theta+\Theta^*}{2} \leqq \pi$$

$\sin\frac{\Theta+\Theta^*}{2} \leqq 0$. Es folgt also aus dem Verschwinden des Integrals

$$\oint \sin\frac{\Theta+\Theta^*}{2}\,ds$$

$\Theta+\Theta^* = \text{const}$. Wegen (17) ist dann $\Theta = \text{const}$ und auch $\Theta^* = \text{const}$.

Aus $\oint \cos\Theta\,ds = 0$ und $\oint \cos\Theta^*\,ds = 0$ folgt dann aber $\cos\Theta = 0$ und $\cos\Theta^* = 0$. Weil $0 \leqq -\Theta$; $-\Theta^* \leqq \pi$ ist, so muß in diesem 2. Fall $-\Theta = \frac{\pi}{2}$ und $-\Theta^* = \frac{\pi}{2}$ sein. Es ist also auch hier $\Theta - \Theta^* = 0$. Somit hat die Konstante γ stets den Wert:

$$\gamma = 2l\pi.$$

Weil jetzt $\cos\gamma = +1$ ist, so verschwindet $G(\mathfrak{F})$ und die beiden Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ sind kongruent oder symmetrisch. Damit ist der Satz bewiesen:

Satz 3. *Es seien zwei isometrisch aufeinander abgebildete, beschränkte, dreimal stetig differenzierbare Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ mit positiver* GAUSSscher *Krümmung gegeben, die von je einer geschlossenen Randkurve berandet werden.*

Sind die Randkurven beider Flächen Eigenschattengrenzen, so sind beide Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ kongruent oder symmetrisch zueinander.

(Wir können auch sagen: Sind die Randstreifen beider Flächen zylindrisch, dann sind beide Flächen kongruent oder symmetrisch.)

Sprechen wir den vorstehenden Satz noch für die endlichen Verbiegungen aus:

Eine beschränkte, dreimal stetig differenzierbare Fläche mit positiver GAUSSscher *Krümmung, welche von einer geschlossenen Eigenschattengrenze (von einem geschlossenen zylindrischen Randstreifen) berandet wird, läßt sich endlich nicht so verbiegen, daß der Rand seine Eigenschaft, Eigenschattengrenze (zylindrischer Streifen) zu sein, beibehält. (Von der trivialen „Verbiegung", der Bewegung ist natürlich abzusehen.)*

5. Die endlichen Verbiegungen einer besonderen Flächenklasse.

Wir wollen sagen, eine Fläche gehöre zur Klasse $\mathfrak{K}$, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. Sie ist beschränkt und dreimal stetig differenzierbar.

2. Sie wird von zwei sich nicht schneidenden geschlossenen Kurven R_1 und R_2 berandet, die zweimal stetig differenzierbar sind. Längs R_1 sei der Flächennormalenvektor ξ konstant. [Das heißt längs R_1 ist $K = 0$ und $b(s) = 0$.]

3. In allen Punkten der Fläche, die nicht auf dem Rand R_1 liegen, ist $K > 0$.

4. Die Projektion der Fläche auf die Ebene der Randkurve R_1 sei eindeutig. [Ist $\mathfrak{e}$ der Stellungsvektor dieser Ebene, so ändert $(\mathfrak{e}\,\xi)$ sein Vorzeichen auf der Fläche nicht.]

Wir nehmen weiter wieder an, daß der Flächennormalenvektor ξ in das Innere der kleinsten konvexen Hülle der Fläche weist. Dann ist die zweite Fundamentalform in allen inneren Flächenpunkten positiv definit.

Ein einfaches Beispiel einer Fläche der Klasse $\mathfrak{K}$ ist der Teil eines Torus, den man erhält, wenn man alle Flächenpunkte mit negativer Gaussscher Krümmung wegläßt, dann den Torus längs des Äquators aufschneidet und eine Hälfte fortläßt.

Für die Verbiegung einer Fläche der Klasse $\mathfrak{K}$ kann man jetzt auch wieder wegen Eigenschaft 3. und 4. als „Gesamtmaß der Verbiegbarkeit" das Integral wählen:

$$G(\mathfrak{F}) = \iint \frac{\|A_{iK}\|}{g} (\mathfrak{e}\,\xi)\, do.$$

Dabei ist $\mathfrak{e}$ der Stellungsvektor der Randebene von R_1. Nach (13) gilt dann:

$$G(\mathfrak{F}) = \oint_{(R_1)} \{(a - a^*)(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{x}}) + (b - b^*)(\mathfrak{e}\,\eta)\}\, ds + \\ + \oint_{(R_2)} \{(a - a^*)(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{x}}) + (b - b^*)(\mathfrak{e}\,\eta)\}\, ds.$$

Nun ist aber längs R_1: $\mathfrak{e} = \xi$ d.h. $(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{x}}) = (\mathfrak{e}\,\eta) = 0$. Daher:

$$G(\mathfrak{F}) = \oint_{(R_2)} \{(a - a^*)(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{x}}) + (b - b^*)(\mathfrak{e}\,\eta)\}\, ds.$$

Wir können demnach sagen:

Das Verbiegbarkeitsmaß einer Fläche der Klasse $\mathfrak{K}$ hängt nur ab von den Eigenschaften der nicht parabolischen Randkurve R_2.

Ist also die nicht parabolische Randkurve einer Fläche der Klasse $\mathfrak{K}$ Eigenschattengrenze bei Beleuchtung senkrecht zu der Ebene der parabolischen Randkurve, so ist die Fläche gegenüber allen endlichen Verbiegungen starr, die die Eigenschaft der Randkurve, Eigenschattengrenze zu sein, nicht ändern. Wir können aber auch die Sätze 1′ und 2′ der Arbeit [6] auf die Flächen der Klasse $\mathfrak{K}$ anwenden. Danach ist eine Fläche der Klasse $\mathfrak{K}$ gegenüber endlichen Verbiegungen starr, wenn nur die Randkurve, die nicht parabolisch

ist, kongruent bleibt. Ist die nicht parabolische Randkurve eben, so genüg für die Starrheit gegenüber endlichen Verbiegungen sogar nur das Festbleiben der Kurvenkrümmung dieser Randkurve. Nach diesen letzten Sätzen ist also das oben beschriebene „Viertel eines Torus" bei allen endlichen Verbiegungen starr, die nur den Randstreifen längs des Äquators zylindrisch lassen oder die nur die konstante Krümmung des Äquators nicht ändern.

Literatur.

[1] Rembs, E.: Zur Verbiegung der Flächen im Großen. Math. Z. **56**, 271. — [2] Rembs, E.: Unverbiegbare offene Flächen. Sitzgsber. Berl. Akad. **1930**, 127ff. — [3] Sauer, R.: Projektive Liniengeometrie, S. 145ff. Berlin u. Leipzig: W. de Gruyter & Co. 1937. — [4] Grotemeyer, K. P.: Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform. Math. Z. **55**, 253ff. — [5] Grotemeyer, K. P.: Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbeiflächen. Arch. Math. Vol. IV, Fasc. 2 (1953). — [6] Grotemeyer, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand. Math. Z. **58**, 41—45 (1953).

Weitere Literaturangaben finden sich in der unter [1] genannten Arbeit.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 13. Dezember 1952.)

Rieger, G. J.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 281—283 (1953)

Über eine Verallgemeinerung des Waringschen Problems.

Von
G. J. Rieger.

L. Schnirelmann[1]) hat mit den bekannten analytischen Methoden, wie sie von Hardy, Littlewood, Winogradoff u. a. verwendet wurden, folgende Verallgemeinerung des Waring-Hilbertschen Satzes bewiesen:

Satz. *Ist $\mathfrak{M}$ eine monotone Folge natürlicher Zahlen, die die Null enthält und eine positive Dichte $d(\mathfrak{M})$ hat, so bilden die n-ten Potenzen der Zahlen aus $\mathfrak{M}$ eine Basis der natürlichen Zahlen.*

Für $d(\mathfrak{M}) = 1$ ist das offenbar die Aussage des Waring-Hilbertschen Satzes[2]).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen kurzen und elementaren Beweis des verallgemeinerten Satzes zu geben. Dazu werden wir den elementaren Linnikschen Beweis des Waring-Hilbertschen Satzes[3]) ein wenig modifizieren.

Beweis. Es sei $\mathfrak{A}$ eine monotone Folge natürlicher Zahlen. Ist x eine beliebige natürliche Zahl, so bezeichnen wir mit $A(x)$ die Anzahl der Zahlen $a \in \mathfrak{A}$ mit $1 \leqq a \leqq x$. Man definiert die Dichte von $\mathfrak{A}$ als

$$d(\mathfrak{A}) = \inf \frac{A(x)}{x}.$$

$\mathfrak{N}$ sei die Folge aller natürlichen Zahlen: $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
$\mathfrak{M}$ sei wie oben erklärt: $\{0, 1, m_2, m_3, \ldots\}$.
Wir bezeichnen

mit $\mathfrak{A}_n$ die Folge: $\{0^n, 1^n, 2^n, \ldots\}$,
mit $\mathfrak{A}'_n$ die Folge: $\{0^n, 1^n, m_2^n, m_3^n, \ldots\}$,
mit $r_{k,n}(m)$ bzw. $r'_{k,n}(m)$ die Anzahl der Lösungssysteme $(x_1, \ldots, x_k)$ (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) von

$$x_1^n + \cdots + x_k^n = m, \tag{1}$$

wobei $x_i \in \mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ist,
und mit $\mathfrak{A}_n^{(k)}$ bzw. $\mathfrak{A}_n^{(k)'}$ die Folge der Zahlen m, die sich in der Form (1) schreiben lassen mit $x_i \in \mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{M}$. Offenbar ist $\mathfrak{A}_n^{(1)} = \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}_n^{(1)'} = \mathfrak{A}'_n$.

[1]) Schnirelmann, L.: Über additive Eigenschaften der Zahlen. Math. Ann. **107**, 649—690 (1933).

[2]) Hilbert, D.: Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen. Math. Ann. **67**, 281—300 (1909).

[3]) Vgl. Chintschin, A. J.: Drei Perlen der Zahlentheorie, S. 33—61. Berlin: Akademieverlag 1951.

LINNIK beweist das Lemma[4]):

Lemma. *Es existieren eine natürliche, nur von n abhängige Zahl* $k = k(n)$ *und eine nur von n abhängige Zahl* $c = c(n)$ *derart, daß für eine beliebige natürliche Zahl N*

$$r_{k,n}(m) < c\, N^{\frac{k}{n}-1} \qquad (1 \leq m \leq N) \tag{2}$$

gilt.

Daraus läßt sich unsere Behauptung leicht herleiten.

Aus der Definition der Zahl $r'_{k,n}(m)$ ergibt sich unmittelbar, daß

$$r'_{k,n}(0) + r'_{k,n}(1) + \cdots + r'_{k,n}(N) = R'_{k,n}(N)$$

die Anzahl aller Lösungssysteme $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_i \in \mathfrak{M}$ ist, für die

$$x_1^n + \cdots + x_k^n \leq N \tag{3}$$

gilt.

Dieser Forderung genügt offenbar jede Menge von Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ aus $\mathfrak{M}$, für die

$$0 \leq x_i \leq \left(\frac{N}{k}\right)^{1/n} \qquad (1 \leq i \leq k)$$

gilt. Man kann also jedes x_i auf mindestens

$$1 + M\left(\left[\left(\frac{N}{k}\right)^{1/n}\right]\right) > d(\mathfrak{M}) \cdot \left(\frac{N}{k}\right)^{1/n}$$

verschiedene Art wählen. Da sich in (3) diese möglichen Werte noch willkürlich kombinieren lassen, folgt

$$R'_{k,n}(N) > \left(d(\mathfrak{M}) \cdot \left(\frac{N}{k}\right)^{1/n}\right)^k. \tag{4}$$

Wäre nun $d(\mathfrak{N}_n^{(k)'}) = 0$, so hätten wir bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und passend gewähltem N

$$A_n^{(k)'}(N) < \varepsilon N.$$

Dabei können wir N als beliebig groß voraussetzen.

Weil aber aus der Definition

$$r'_{k,n}(m) \leq r_{k,n}(m)$$

folgt, erhalten wir durch Anwendung von (2):

$$R'_{k,n}(N) = \sum_{m=0}^{N} r'_{k,n}(m) = r'_{k,n}(0) + \sum_{m=1}^{N} r'_{k,n}(m) < 1 + c\, N^{\frac{k}{n}-1} A_n^{(k)'}(N) < 1 + c\,\varepsilon\, N^{k/n}.$$

Für hinreichend großes N ist also

$$R'_{k,n}(N) < 2c\,\varepsilon\, N^{k/n}.$$

[4]) Vgl. [3]), 35.

Da für hinreichend kleines ε

$$2c\,\varepsilon < \left(\frac{d(\mathfrak{M})}{k^{1\,n}} \right)^k$$

ist, so würden wir

$$R'_{k,n}(N) < \left(d(\mathfrak{M}) \binom{N}{k}^{1\,n} \right)^k$$

erhalten, was (4) widerspricht. Also ist *notwendigerweise*

$$d(\mathfrak{A}_n^{(k)'}) > 0.$$

Das bedeutet aber: $\mathfrak{A}_n^{(k)'}$ ist eine Basis der natürlichen Zahlen und damit auch $\mathfrak{A}'_n$; denn $\mathfrak{A}_n^{(k)'}$ entsteht, indem wir die Folge $\mathfrak{A}'_n$ im Sinne der additiven Zahlentheorie k-mal addieren.

Damit ist die Schnirelmannsche Verallgemeinerung des Waring-Hilbertschen Satzes vollständig bewiesen.

Gießen (Lahn), Mathem. Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 2. Februar 1953.)

VOLKMANN, B.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 284–287 (1953)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. I.

Herrn Professor Dr. HANS ROHRBACH zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von

BODO VOLKMANN.

1. Im folgenden werden g-adische Entwicklungen

$$\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{g^i} \quad (e_i \text{ ganz};\ 0 \leq e_i < g;\ g \geq 2) \tag{1}$$

betrachtet. Wird dabei vereinbart, daß unendlich viele Ziffern e_i von Null verschieden sein sollen, so existiert für jedes ϱ mit $0 < \varrho \leq 1$ genau eine Entwicklung der Form (1). Ist $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{g^i}$, so soll das Symbol $\sigma \underset{g}{\leqq} \varrho$ („σ ist g-adisch enthalten in ϱ") mit

$$e_i \leq f_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

gleichbedeutend sein. Die Menge aller σ mit $\sigma \underset{g}{\leqq} \varrho$ wird mit $\langle \varrho \rangle_g$ bezeichnet.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Hausdorffschen Dimensionen der Mengen $\langle \varrho \rangle_g$ in bezug auf eine geeignet gewählte Funktionenklasse zu bestimmen. Auf diese Weise wird für den Fall, daß die gewöhnliche (gebrochene) Dimension von $\langle \varrho \rangle_g$ verschwindet, eine darüber hinausgehende Aussage über die „Größe" von $\langle \varrho \rangle_g$ möglich.

2. Den allgemeinen Hausdorffschen Maßbegriff führen wir folgendermaßen ein: Sind M und V Punktmengen im R_r, so heißt V eine η-Überdeckung von M $(\eta > 0)$, wenn V aus höchstens abzählbar vielen konvexen Gebieten $\mathfrak{v}_\nu$ besteht, deren Durchmesser $|\mathfrak{v}_\nu|$ der Bedingung $|\mathfrak{v}_\nu| \leq \eta$ genügen. Die Menge aller η-Überdeckungen von M sei $U(\eta, M)$. Ist dann $\mu(t)$ eine für $0 \leq t \leq t_0$ erklärte stetige und monoton nichtabnehmende Funktion, die genau bei $t = 0$ verschwindet — solche Funktionen wollen wir M-Funktionen nennen —, so wird das μ-Maß von M erklärt als

$$\mu\{M\} = \lim_{\eta \to 0^+} \mu_\eta\{M\},$$

wobei

$$\mu_\eta\{M\} = \operatorname*{fin}_{V \in U(\eta, M)} \sum_{\mathfrak{v}_\nu \in V} \mu(|\mathfrak{v}_\nu|) \tag{3}$$

gesetzt wird. Es sei F eine Klasse von M-Funktionen $\mu^{(\alpha)}(t)$, definiert für $\underline{\alpha} < \alpha < \overline{\alpha}$ $(-\infty \leq \underline{\alpha} < \overline{\alpha} \leq +\infty)$, die der Bedingung genügen:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\mu^{(\alpha_2)}(t)}{\mu^{(\alpha_1)}(t)} = 0, \quad \text{wenn } \alpha_1 < \alpha_2 \text{ ist.} \tag{4}$$

Man kann leicht zeigen, daß es zu einer solchen Klasse von M-Funktionen für jede Menge M ein δ mit $\underline{\alpha} \leqq \delta \leqq \overline{\alpha}$ gibt, derart, daß

$$\mu^{(\alpha)}\{M\} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha > \delta \\ \infty & \text{für } \alpha < \delta \end{cases} \tag{5}$$

wird, soweit diese $\mu^{(\alpha)}$ definiert sind. Wir nennen δ die Hausdorffsche Dimension von M in bezug auf die Funktionenklasse F, geschrieben $\delta = \dim_F M$. Wird für F die Klasse der Funktionen t^α $(0 < \alpha < r)$ genommen, so ist $\dim_F M$ mit der gebrochenen Hausdorffschen Dimension $\dim M$ identisch[1]).

Die im folgenden auftretenden Mengen M lassen sich in der Form $M = \bigwedge_{n=1}^{\infty} I_n$ darstellen[2]), wobei jedes I_n aus g_n getrennten Intervallen $i_n^1, \ldots, i_n^{g_n}$ gleicher Länge λ_n besteht, derart, daß jedes Intervall i_{n+1} von I_{n+1} $(n = 2, 3, \ldots)$ in einem Intervall i_n von I_n enthalten ist. Für solche Mengen M gilt der Satz von H. G. Eggleston[3]): Wenn

a) jedes Intervall i_n^m $(m = 1, \ldots, g_n)$ die gleiche Anzahl $\left(\text{also } \frac{g_{n+1}}{g_n}\right)$ von Intervallen i_{n+1} enthält und

b) für eine gegebene Klasse F von M-Funktionen[4]) ein α_0 existiert, so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n)}$ für alle $\alpha < \alpha_0$ konvergiert, dann ist $\dim_F M \geqq \alpha_0$.

3. Mit Hilfe dieses Satzes wird es möglich, das eingangs formulierte Problem zu behandeln. Zu der Ziffernfolge e_i von (1) definieren wir die Folge) $G(n$ durch

$$g^{G(n)} = \prod_{i=1}^{n} (1 + e_i)$$

und interpolieren sie zu einer monoton nichtabnehmenden, für $x \geqq 0$ stetigen Funktion $G(x)$, was offenbar auf mannigfache Weise möglich ist. Dann ist leicht zu verifizieren, daß die Funktionen

$$\xi^{(\alpha)}(t) = g^{-\alpha G\left(\frac{-\log t}{\log g}\right)} \quad (0 < \alpha < \infty,\ 0 \leqq t \leqq 1)$$

M-Funktionen sind. Das angekündigte Ergebnis liefert der

[1]) Manche Autoren nennen in diesem Fall $\dim_F M$ die Besicovitchsche Dimension von M und sprechen nur dann von gebrochenen Hausdorffschen Dimensionen $\delta = \dim M$, wenn $0 < \mu^{(\delta)}\{M\} < \infty$ für $\mu^{(\delta)}(t) = t^\delta$ ist.

[2]) Solche Mengen sind vom Verfasser betrachtet worden: Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen [J. reine angew. Math. **190**, 199—230 (1952), insbesondere S. 212ff.]. Die dortige Bezeichnungsweise ist hier weitgehend beibehalten worden.

[3]) Eggleston, H. G.: Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory. Proc. London Math. Soc. **2**, 54 (1951), 42—93, Theorem 5. Wir spezialisieren den Satz hier auf den Fall $r = 1$.

[4]) Eggleston macht zwar noch die Voraussetzungen, daß $\frac{t^r}{\mu(t)}$ monoton wachsen und $\lim_{t \to 0^+} \frac{t^r}{\mu(t)} = 0$ sein soll, und fordert ferner strenge Monotonie der Funktionen $\mu(t)$; doch zeigt sich, daß zum Beweise des angeführten Theorem 5 nur M-Funktionen benötigt werden.

Satz 1. *In bezug auf die Klasse Z der Funktionen* $\xi^{(\alpha)}(t)$ *ist* $\dim\limits_{Z}\langle\varrho\rangle_g = 1$.

Beweis. a) Sei $\alpha > 1$. Ist K_n die Menge der σ, bei denen (2) für die ersten n Ziffern erfüllt ist, so wird $\langle\varrho\rangle_g = \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Jede Menge K_n besteht aus $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+e_i)$ Intervallen $\mathfrak{k}_n$ der Form $\left(\frac{k}{g^n}, \frac{k+1}{g^n}\right)$, da bei einer Zahl $\sigma \in \langle\varrho\rangle_g$ die i-te Ziffer jeden der Werte $0, 1, \ldots, e_i$ annehmen kann. Somit ist jedes K_n eine g^{-n}-Überdeckung von $\langle\varrho\rangle_g$, und man erhält, wenn man das Symbol $\xi_\eta^{(\alpha)}$ entsprechend wie μ_η in (3) gebraucht,

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi^{(\alpha)}\{\langle\varrho\rangle_g\} = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_{g^{-n}}^{(\alpha)}\{\langle\varrho\rangle_g\} \\ \qquad\qquad \leqq \underline{\lim} \prod\limits_{i=1}^{n}(1+e_i)\,\xi^{(\alpha)}(g^{-n}) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, g^{G(n)-\alpha G(n)} = 0. \end{cases}$$

Also ist nach (5) $\dim\limits_{Z}\langle\varrho\rangle_g \leqq 1$.

b) Sei $\alpha < 1$. Da jedes Intervall $\mathfrak{k}_n$ die gleiche Anzahl von Intervallen $\mathfrak{k}_{n-1}$ enthält, nämlich e_{n-1}, trifft die Voraussetzung a) des Satzes von Eggleston zu. Ebenso ist auch die Voraussetzung b) erfüllt, denn die Reihe

$$(7)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} g \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+e_i)\,\xi^{(\alpha)}(g^{-n})} = \sum_{n=1}^{\infty} g^{1-G(n)(1-\alpha)}$$

ist wegen $G(n)\to\infty$ sicher konvergent. Also ist $\dim\limits_{Z}\langle\varrho\rangle_g \geqq 1$.

Aus a) und b) folgt die Behauptung.

4. Zu Satz 1 ergeben sich einige Folgerungen und Ergänzungen, die besondere Erwähnung verdienen:

Satz 2. *Die gebrochene Dimension von* $\langle\varrho\rangle_g$ *ist* $\dim\langle\varrho\rangle_g = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{G(n)}{n}$.

Der Beweis ergibt sich analog zu dem von Satz 1, wenn man statt $\xi^{(\alpha)}\{\langle\varrho\rangle_g\}$ überall die mit der Funktion $\tau^{(\alpha)}(t) = t^\alpha$ gebildeten Maße $\tau^{(\alpha)}\{\langle\varrho\rangle_g\}$ einsetzt. Schreibt man $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{G(n)}{n} = \zeta$, so ist offenbar $0 \leqq \zeta \leqq 1$ und

$$\zeta = \underline{\lim} \frac{1}{\log g} \cdot \frac{1}{n} \cdot \log \prod_{i=1}^{n}(1+e_i) = \underline{\lim} \frac{\log \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+e_i)}}{\log g}.$$

Daher erhält man für $\alpha > \zeta$ an Stelle von (6)

$$\tau^{(\alpha)}\{\langle\varrho\rangle_g\} = \lim_{n\to\infty} \tau_{g^{-n}}^{(\alpha)}\{\langle\varrho\rangle_g\} \leqq \underline{\lim_{n\to\infty}} \prod_{i=1}^{n}(1+e_i)\, g^{-\alpha n} = \underline{\lim}\, g^{(\zeta-\alpha)n} = 0$$

und für $\alpha < \zeta$ an Stelle von (7) für $\varepsilon > 0$ die ebenfalls konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} g \cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+e_i)\, g^{-\alpha n}} < \sum_{n=1}^{n_0} g^{1-n\alpha\ G(n)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g^{1-n\varepsilon},$$

da bei geeignetem n_0 für $n > n_0$ sicher $G(n) > n(\alpha + \varepsilon)$ ist.

Im Falle $g = 2$ läßt sich die dyadische Entwicklung $\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}$ $(e_i = 0 \text{ oder } 1)$ als Dualwert der Menge $\mathfrak{A}$ von natürlichen Zahlen auffassen, deren charakteristische Funktion die Folge e_i ist. Bei dieser Betrachtungsweise fällt $\langle \varrho \rangle_2$ mit der Menge ${}_F[\mathfrak{A}]$ der Dualwerte der unendlichen Untermengen von $\mathfrak{A}$ zusammen. Bezeichnet man die Anzahlfunktion von $\mathfrak{A}$ mit $A(n) = \sum_{i=1}^{n} e_i$, so wird $2^{A(n)} = \prod_{i=1}^{n} (1 + e_i)$ und daher $A(n) = G(n)$. Infolgedessen gehen, wenn $A(n)$ zu einer stetigen, monoton nichtabnehmenden Funktion $A(x)$ interpoliert wird, die Sätze 1 und 2 über in

Satz 3. *In bezug auf die Klasse Z der Funktionen* $\xi^{(\alpha)}(t) = 2^{-\alpha A\left(\frac{-\log t}{\log 2}\right)}$ $(0 < \alpha < \infty,\ 0 \leqq t \leqq 1)$ *ist* $\dim_z {}_F[\mathfrak{A}] = 1$.

Satz 4. *Die gebrochene Dimension von* ${}_F[\mathfrak{A}]$ *ist* $\dim {}_F[\mathfrak{A}] = \lim_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n}$.

Satz 4 stellt ein früheres Resultat des Verfassers dar[5]).

[5]) l. c. [2]), Satz 35.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 4. Februar 1953.)

Zeller, K.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 288—305 (1953)

FK-Räume in der Funktionentheorie. I*.

Von
Karl Zeller.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung 288
§ 1. Definitionen und Bezeichnungen 291
§ 2. Kriterien für *FK*-Räume 293
§ 3. Lineare Operationen, Halbnormen und Minoranten 296
§ 4. Der gleitende Buckel 298
§ 5. Halbstetige Funktionen 300
§ 6. Produkträume 301
§ 7. Sätze über *FK*-Räume 303

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit bezweckt die Klärung verschiedener Konvergenz- und Divergenzfragen in der Funktionentheorie mit Hilfe der Funktionalanalysis, insbesondere der Lehre von den *FK*-Räumen (= *F*-Räumen mit koordinatenweiser Konvergenz). Dabei charakterisieren wir einen *FK*-Raum folgendermaßen: Er ist linear, durch abzählbar viele Halbnormen wird in ihm eine separierte gleichmäßige Struktur im Sinne von Bourbaki erklärt, der Raum ist bezüglich dieser Struktur vollständig, seine Elemente sind komplexe Zahlenfolgen $\mathfrak{a} = \{a_k\}$, die Abbildungen $\mathfrak{a} \to a_k$ sind linear und stetig.

Die Verwendung dieser Räume veranlaßt uns, statt einer analytischen Funktion $a(z) = \sum a_k z^k$ die Folge $\mathfrak{a} = \{a_k\}$ ihrer Koeffizienten, statt Funktionenräumen also Folgenräume zu betrachten und die meisten Ergebnisse als Beziehungen zwischen Mengen von Zahlenfolgen auszudrücken, was auch häufig prägnante Formulierungen gestattet. Die Resultate beruhen letztlich auf einigen wenigen bekannten Sätzen über lineare Räume, jedoch führt ein weiter Weg von diesen Sätzen bis zu unseren Anwendungen.

Nach der Behandlung der funktionalanalytischen Grundlagen in §§ 1 bis 7 (s. unten) beginnt in § 8 der funktionentheoretische Teil mit der Betrachtung des *FK*-Raumes $\mathfrak{R}$ (Reguläre Funktionen), welcher der Menge der in $|z| < 1$ regulären Funktionen entspricht (8.1). Konvergenz und Beschränktheit einer Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{R}$ (diese Begriffe sind durch die Topologie erklärt) bedeutet für

*) Diese Arbeit ist von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen als Habilitationsschrift angenommen worden. Sie wurde dem Berichterstatter im Mai 1952 überreicht. Der vorliegende erste Teil bringt die funktionalanalytischen Grundlagen, der zweite Teil (im nächsten Heft der Math. Z.) die Anwendungen auf die Funktionentheorie. Herrn Prof. Knopp, Herrn Prof. Wielandt und Herrn Dr. Stoll danke ich für zahlreiche Ratschläge.

die zugehörigen Funktionen $a^{(n)}(z)$ gleichmäßige Konvergenz bzw. Beschränktheit in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$. Aus verschiedenen Durchschnittsdarstellungen von $\mathfrak{R}$ lesen wir unter anderem ab, daß jede in $\mathfrak{R}$ beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge enthält (8.3), und haben damit auf neue Weise einen bekannten funktionentheoretischen Satz gewonnen.

Dieser ist z.B. von Bedeutung für die Konvergenzsätze der Funktionentheorie, die in § 9 behandelt werden. In einem *FK*-Raum $\mathfrak{E}$ ist neben der gewöhnlichen (starken) Konvergenz noch eine „schwache" Konvergenz mittels der stetigen Linearformen definiert. Ist $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{R}$ und die Folge $a^{(n)}$ in $\mathfrak{E}$ schwach konvergent, so konvergieren die zugehörigen Funktionen $a^{(n)}(z)$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ gleichmäßig. Kriterien für schwache Konvergenz in $\mathfrak{E}$ liefern einen allgemeinen Satz (9.1), aus dem die Konvergenzsätze von Vitali, Blaschke, Khintchine-Ostrowski folgen. Wir beleuchten dabei den Zusammenhang zwischen Bedingungen, die eine reguläre Funktion eindeutig bestimmen, und Bedingungen, die die Konvergenz einer Funktionenfolge bewirken.

Die nächsten drei Paragraphen behandeln das Verhalten im Einheitskreis regulärer Funktionen $a(z)$ bei radialer Annäherung an $|z|=1$. Zur Erläuterung unserer Methode beginnen wir in § 10 mit bekannten Ergebnissen: Es gibt Funktionen $a(z)$, so daß $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ für ein, abzählbar viele, über abzählbar viele, alle ζ mit $|\zeta|=1$ nicht existiert (10.1—4). 10.5 und 10.6 betreffen nichtfortsetzbare Funktionen. In § 11 geht es um die Frage: Zu welchen Teilmengen C von $|\zeta|=1$ gibt es ein $a(z)$, so daß $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta\in C$ existiert, für $\zeta\notin C$, $|\zeta|=1$ nicht existiert? § 12 befaßt sich mit der Möglichkeit, daß $a(\varrho\zeta)$ $(\varrho\to 1-)$ auf $|\zeta|=1$ ungleichmäßig konvergiert.

In §§ 13 und 14 untersuchen wir bei Funktionen $a(z)=\sum a_k z^k$, die in $|z|<1$ regulär sind und gewisse weitere Eigenschaften haben, das Verhalten der Teilsummen $\sum_{k=0}^{n} a_k$ bzw. $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ (unter anderem Sätze von Fejér und Szász).

§ 1 bringt Bezeichnungen, §§ 2 bis 7 die funktionalanalytischen Hilfsmittel, wobei teilweise bekannte Dinge wiederholt werden müssen.

In § 2 geben wir allgemeine Kriterien, wann eine Menge von Zahlenfolgen (mit geeigneten Halbnormen) ein *FK*-Raum ist. Diese Kriterien umfassen alle bei uns vorkommenden Fälle.

Es folgen in § 3 die Grundtatsachen über die einfachsten Funktionen in *FK*-Räumen, nämlich die linearen Operationen und die Halbnormen. Weiter führen wir die „Minoranten einer Halbnorm" ein, die wir später bei komplizierten Divergenzproblemen benötigen (10.4, 11.5). Schließlich formulieren wir zwei geläufige Lemmata über Folgen linearer Operationen (3.6 und 3.7).

An diesen Lemmata erläutern wir die in den anschließenden §§ 4 bis 6 untersuchten Beweismethoden, die mit den Stichworten „Gleitender Buckel", „Halbstetige Funktionen", „Abgeschlossene Produkträume" zu kennzeichnen

sind und zur Beantwortung der folgenden, eng zusammenhängenden Fragen dienen:

Wann gilt für zwei FK-Räume $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ die Beziehung $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$, wann gilt $\mathfrak{E} \not\subset \mathfrak{F}$?

Wann ist eine lineare Operation zwischen zwei FK-Räumen stetig?

Wann nimmt eine Funktion $\chi(a) \leqq \infty$ in einem FK-Raum den Wert $+\infty$ an?

Auf diese Fragen, hauptsächlich die erste, werden sich nämlich fast alle unsere Probleme zurückführen lassen. Die drei Methoden tragen ungefähr gleich weit. Wir bevorzugen in dieser Arbeit die letzte (Produkträume), weil sie bis jetzt in der Literatur etwas vernachlässigt wurde, außerdem auch für FK-Räume besonders geeignet ist. Jedoch gibt es Fälle, wo nur der „Buckel" oder nur die „halbstetigen Funktionen" zum Ziele führen (vgl. etwa 11.2 und 10.4).

§ 7 stellt die wichtigsten Resultate über FK-Räume zusammen. Diese handeln von Vereinigung und Durchschnitt abzählbar vieler FK-Räume und vor allem von der Beziehung $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$ zwischen zwei FK-Räumen.

Ausführliche Inhaltsangaben stehen am Anfang jedes einzelnen Paragraphen.

Wir betonen, daß ein guter Teil unserer Ergebnisse auf der Ausnützung der „koordinatenweisen Konvergenz" in FK-Räumen beruht. Wir könnten eine analoge Eigenschaft auch für Räume formulieren, deren Elemente Funktionen sind, jedoch kürzt die Verwendung der FK-Räume manche Ausführungen ab.

Schon seit langer Zeit versuchte man, mit funktionalanalytischen Methoden in die Funktionentheorie einzudringen. Größere Erfolge hat man jedoch erst in neuerer Zeit erzielen können, nachdem geeignete Raumtypen eingeführt und untersucht worden sind, nämlich die F-Räume, die vollkommenen Räume (s. KÖTHE [1950]) und gewisse Verallgemeinerungen derselben. Ihrer Anwendung in der Funktionentheorie haben vor allem KÖTHE und TOEPLITZ Bahn gebrochen. Verfasser verdankt diesen Autoren zahlreiche Anregungen.

Die Veröffentlichungen auf diesem Gebiet teilen wir in vier Gruppen ein:

1. Die Existenz analytischer Funktionen mit gewissen Eigenschaften wird auf die Lösung eines unendlichen Gleichungssystems zurückgeführt. Arbeiten von BOREL, EIDELHEIT, POLYA, KÖTHE, TOEPLITZ (s. Schrifttumsverzeichnis bei KÖTHE [1947]).

2. Der Zusammenhang analytischer Funktionen mit ihren Randwerten bzw. Randverteilungen (Cauchyscher Integralsatz u. ä.) wird untersucht. Arbeiten von FANTAPPIÉ, TAYLOR, SILVA, KÖTHE, DIAS, GROTHENDIECK (s. Literaturverzeichnis bei KÖTHE [1952]).

3. Man befaßt sich mit der Existenz von Grenzwerten, die im Zusammenhang mit analytischen Funktionen auftreten (Randwerte, Reihenentwicklungen, Funktionsfolgen). Arbeiten von KIERST-SZPILRAJN (s. § 10), TOEPLITZ (s. §§ 8 und 9), TAYLOR (s. § 9).

4. Sonstige: GANAPATHY IYER, DOSS, MARCOUCHEWITSCH (Behandlung allgemeiner topologischer Eigenschaften, Orthogonalentwicklungen, Basen).

Die vorliegende Arbeit gehört zur dritten Gruppe. Von TAYLOR und TOEPLITZ weichen wir in der Art der topologischen Hilfsmittel ab: TAYLOR beschränkt sich auf Banachräume, TOEPLITZ verwendet vollkommene Räume. Dennoch ergeben sich manche Parallelen zu diesen Arbeiten (s. §§ 8 und 9).

§ 1. Definitionen und Bezeichnungen.

Übersicht. Wir setzen die Kenntnis der Grundlagen der Funktionalanalysis und Topologie voraus. Wir verwenden die Bezeichnungen und Definitionen der französischen Schule (BOURBAKI [1940], [1949], DIEUDONNÉ [1942]), die sich von denen der polnischen Schule (BANACH [1932]) hauptsächlich in folgenden Punkten unterscheiden:

Die Topologie wird nicht auf konvergenten Folgen, sondern auf offenen Mengen aufgebaut. „*F*-Raum" ist ein weniger umfassender Begriff als bei Banach. Ein linearer Raum hat die komplexen, nicht nur die reellen Zahlen als Skalare. Eine lineare Operation ist nicht notwendig stetig. Das Wort Funktional wird vermieden.

Nicht bei Bourbaki stehen die Begriffe: Fette Teilmenge, Folgenraum, *BK*-Raum, *FK*-Raum, Abschnittsdichte, Abschnittskonvergenz. Für das Wort „entourage" schlagen wir die Übersetzung „Band" vor (ein Band längs der Diagonale des Produktraumes, ein Band, das die Umgebungen verschiedener Punkte verbindet).

Begriffe wie Menge, Funktion, Operation, stetig, halbstetig setzen wir als bekannt voraus — vgl. etwa CARATHÉODORY [1927, insbesondere S. 120ff.], BANACH [1932], HILLE [1948].

Ein (komplexer) *linearer Raum* $\mathfrak{E}$ ist eine additiv geschriebene abelsche Gruppe, in der eine Multiplikation $\lambda\mathfrak{a}$ mit den komplexen Zahlen λ erklärt ist, die folgenden Gesetzen genügt:

$$(\lambda+\mu)\mathfrak{a}=\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{a},\quad \lambda(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\lambda\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b},\quad (\lambda\mu)\mathfrak{a}=\lambda(\mu\mathfrak{a}),\quad 1.\ \mathfrak{a}=\mathfrak{a}.$$

Eine *lineare Operation* oder lineare Abbildung T (zwischen zwei linearen Räumen) erfüllt die Beziehungen

$$T(\lambda\mathfrak{a})=\lambda T(\mathfrak{a}),\quad T(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{b}).$$

Eine lineare Operation T, deren Werte komplexe Zahlen sind, wird *Linearform* genannt. Aus Gründen der „Dualität" wird ihr Wert oft mit $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}'\rangle$ bezeichnet, wo $\mathfrak{a}'$ als Symbol für die betreffende Abbildung steht.

Eine *Halbnorm* (oder Quasinorm) $\varphi(\mathfrak{a})$ ist eine in einem linearen Raum $\mathfrak{E}$ erklärte Operation, deren Werte positive Zahlen (einschließlich der Null) sind, mit den Eigenschaften

$$\varphi(\lambda\mathfrak{a})=|\lambda|\cdot\varphi(\mathfrak{a}),\quad \varphi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\leqq\varphi(\mathfrak{a})+\varphi(\mathfrak{b}).$$

Folgt überdies $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$ (Nullelement) aus $\varphi(\mathfrak{a})=\mathfrak{o}$, so heißt φ eine *Norm*.

Lassen wir bei reellwertigen Funktionen, insbesondere Halbnormen, den Wert $+\infty$ zu, so kennzeichnen wir dies durch $\varphi(\mathfrak{a})\leqq\infty$. Wir rechnen dann in üblicher Weise mit dem Wert ∞, wobei die Ausdrücke $0\cdot\infty$ und $\infty-\infty$ undefiniert bleiben.

In einem linearen Raum $\mathfrak{E}$ seien abzählbar viele Halbnormen φ_i erklärt; $\mathfrak{U}(\varepsilon,m)$ $(\varepsilon>0;\ m=0,1,\ldots)$ sei die Menge der Elementpaare $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ (wo $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathfrak{E}$) mit

$$\varphi_0(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})<\varepsilon,\ldots,\varphi_m(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})<\varepsilon.$$

Mit den $\mathfrak{U}$ als Grundsystem von Bändern (entourages) ist dann in $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi_i]$ eine *gleichmäßige Struktur* und damit eine *Topologie* erklärt (BOURBAKI [1940, S. 85—92]). Von dieser Struktur müssen wir uns merken, daß in ihr — gemäß den allgemeinen Definitionen — eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine *Cauchyfolge* bzw. gegen $\mathfrak{a}$ *konvergent* heißt, wenn es zu jedem Band $\mathfrak{U}$ ein r gibt, so daß

$$(\mathfrak{a}^{(m)}, \mathfrak{a}^{(n)}) \in \mathfrak{U} \qquad (m, n > r)$$

bzw.

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{(n)}) \in \mathfrak{U} \qquad (n > r)$$

gilt. Diese Bedingungen sind gleichbedeutend mit

$$\lim_{m,n\to\infty} \varphi_i(\mathfrak{a}^{(m)} - \mathfrak{a}^{(n)}) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_i(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^{(n)}) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

Weiter heißt eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ *beschränkt*, wenn es zu jedem Band $\mathfrak{U}$ ein $\lambda > 0$ gibt, so daß

$$(\mathfrak{o}, \lambda\, \mathfrak{a}^{(n)}) \in \mathfrak{U} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

gilt, was dasselbe bedeutet wie

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \varphi_i(\mathfrak{a}^{(n)}) < \infty \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

$\mathfrak{E}$ ist mit dieser Struktur ein *linearer topologischer Raum* (d.h. ein linearer Raum mit einer Topologie, in der $\lambda\,\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ als Funktionen beider Veränderlichen stetig sind) und sogar ein *lokalkonvexer* Raum (s. DIEUDONNÉ [1942, S. 110]). In $\mathfrak{E}$ sind vermittels der Topologie Begriffe wie stetig, abgeschlossen, dicht, Grundmenge, nirgends dicht erklärt. Eine Untermenge von $\mathfrak{E}$ heißt *mager* (oder Menge von erster Kategorie), wenn sie Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen ist, *fett*, wenn sie Komplement einer mageren Menge ist. Der Raum $\mathfrak{E}$ heißt vollständig, wenn jedes *Cauchyfilter* (BOURBAKI [1940, S. 99]) in ihm konvergent ist, was hier — wegen der Metrisierbarkeit von $\mathfrak{E}$, s. unten — bedeutet, daß jede Cauchyfolge gegen ein Grenzelement konvergiert.

Ein F-Raum ist ein Raum $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi_i]$ der eben beschriebenen Art, in dem $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ aus $\varphi_i(\mathfrak{a}) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$ folgt *(separierte Struktur)* und der überdies vollständig ist. Ein F-Raum heißt ein B-Raum $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi]$, wenn seine Struktur durch eine einzige Halbnorm $\varphi(\mathfrak{a}) = \|\mathfrak{a}\|$ beschrieben werden kann, was sich so ausdrücken läßt: $\mathfrak{E}$ ist ein F-Raum mit den Halbnormen $\varphi, 0, 0, \ldots$ (oder auch $\varphi, \varphi, \ldots$); φ ist dann natürlich eine Norm.

In einem Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ (s. oben) führen wir mittels der stetigen Linearformen $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle$ (kurz mit $\mathfrak{a}'$ bezeichnet) neben der oben genannten (starken) Struktur eine *„schwache" gleichmäßige Struktur* und damit eine *„schwache" Topologie* ein. Als Grundsystem von Bändern nehmen wir die durch

$$|\langle \mathfrak{a} - \mathfrak{b}, \mathfrak{a}' \rangle| < \varepsilon \qquad (\mathfrak{a}' \in \mathfrak{F}')$$

definierten Mengen $\mathfrak{U}(\varepsilon, \mathfrak{F}')$, wobei ε die Zahlen > 0 und $\mathfrak{F}'$ alle endlichen Teilmengen der Gesamtheit der stetigen Linearformen in $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ durchläuft. Die auf dieser Struktur beruhenden Begriffe versehen wir mit dem Zusatz „schwach" (*schwach konvergent* usw.). Die schwache gleichmäßige Struktur ist wegen der Stetigkeit der Linearformen *gröber* als die starke, d.h. enthält weniger Bänder, aber mehr konvergente Filter und Folgen (wobei „mehr" „gleichviel" nicht ausschließen soll).

Die gleichmäßige (starke) Struktur in $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ läßt sich mittels einer Metrik definieren, z.B. durch

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{\varphi_i(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{1 + \varphi_i(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}$$

(vgl. BOURBAKI [1949, S. 22—23]), so daß wir in $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ die Betrachtung der Filter durch die der Folgen ersetzen, m. a. W. die Struktur mittels Folgen erklären können. Dies geht jedoch im allgemeinen nicht bei der schwachen Struktur. Die Menge der stetigen Linearformen $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{E}$ bildet den dualen Raum $\mathfrak{E}'$, der sich ersichtlich als linearer Raum auffassen läßt und in dem man in verschiedener Weise gleichmäßige Strukturen und Topologien einführen kann. Uns interessiert nur der Fall, daß $\mathfrak{E}$ ein *B*-Raum ist: $\mathfrak{E}'$ ist dann mit der Norm

$$||\mathfrak{a}'|| = \overline{\underset{||\mathfrak{a}|| < 1}{\text{fin}}} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle|$$

ebenfalls ein *B*-Raum.

Ein *BK*- bzw. *FK-Raum* ist ein *B*- bzw. *F*-Raum, dessen Elemente *Stellen* (Folgen komplexer Zahlen) $\mathfrak{a} = \{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ sind, und in dem die Abbildungen $\mathfrak{a} \to a_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ stetige Linearformen sind. Aus der (starken) Konvegenz im Raumsinne folgt also die *„koordinatenweise Konvergenz"*. Da sich ein Stellenraum auf „höchstens eine Weise" als *FK*-Raum auffassen läßt (die genaue Aussage steht in 7.1), können wir für einen *FK*-Raum und die Menge seiner Elemente dieselbe Bezeichnung verwenden. So ist für zwei *FK*-Räume $\mathfrak{E} < \mathfrak{F}$ (was $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ nicht ausschließt) im mengentheoretischen Sinn zu verstehen.

Ein *FK*-Raum (oder *BK*-Raum) $\mathfrak{E}$ besitzt *Abschnittsdichte*, wenn die *abbrechenden Stellen* (Stellen $\{a_k\}$ mit $a_k = 0$ für fast alle k) zum Raum gehören und in ihm dicht liegen; er besitzt *Abschnittskonvergenz*, wenn darüber hinaus für jedes $\{a_k\} \in \mathfrak{E}$ die Stellen $\{a_0, \ldots, a_r, 0, 0, \ldots\}$ bei $r \to \infty$ gegen $\{a_k\}$ konvergieren.

Weitere Bezeichnungen findet man in § 8.

§ 2. Kriterien für *FK*-Räume.

Übersicht. Wir geben einige Kriterien dafür, daß gewisse Folgenräume durch Festsetzung geeigneter Halbnormen als *FK*-Räume aufgefaßt werden können. Diese Kriterien umfassen fast alle bekannten Fälle von *FK*-Räumen. Schwierigkeiten bereitet dabei nur der Nachweis der Vollständigkeit. Die betreffenden Räume werden aus schon bekannten Räumen gewonnen durch „Kleiner unendlich" – bzw. Null-Setzen von Halbnormen (2.1, 2.1a, 2.2), mittels Durchschnittsbildung (2.3) und einfacher Trans-

formation (2.4). 2.5 behandelt die Frage verschiedener Systeme von Halbnormen, die dieselbe Topologie ergeben. 2.6 liefert damit ein Normierbarkeitskriterium. Wir schließen mit einer Liste von *BK*- und *FK*-Räumen.

Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum). *$[\mathfrak{E};\varphi_i]$ sei ein FK-Raum, $\chi(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ eine nach unten halbstetige Halbnorm in $\mathfrak{E}$. Dann bildet die Menge $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$ einen FK-Raum mit den Halbnormen $\chi(\mathfrak{a})$, $\varphi_0(\mathfrak{a})$, $\varphi_1(\mathfrak{a})$, ...*

Beweis. Die einzige Schwierigkeit liegt im Nachweis der Vollständigkeit von $\mathfrak{F}$. Sei $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine Cauchyfolge in $\mathfrak{F}$. Dann gibt es wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{E}$ ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, so daß $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergiert. Ferner ist $\chi(\mathfrak{a}^{(m)} - \mathfrak{a}^{(n)}) < \varepsilon$ für $m, n > r(\varepsilon)$. Die Halbstetigkeit ergibt $\chi(\mathfrak{a}^{(m)} - \mathfrak{a}) \leqq \varepsilon$ für $m > r(\varepsilon)$, woraus man $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$ und die Konvergenz von $\mathfrak{a}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{F}$ abliest.

Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum). *$\chi_\iota(\mathfrak{a})$ sei irgendeine Menge stetiger Halbnormen in einem FK-Raum $[\mathfrak{E};\varphi_i]$. Dann bildet die Menge $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\chi_\iota(\mathfrak{a}) = 0$ für alle ι einen linearen abgeschlossenen Unterraum in $\mathfrak{E}$, also einen FK-Raum mit den Halbnormen φ_i.*

Beweis. Klar.

Kriterium 2.3 (Durchschnitt von *FK*-Räumen). *Sind $[\mathfrak{E}^{(j)};\varphi_i^{(j)}]$ $(j = 0, 1, \ldots)$ abzählbar (oder endlich) viele FK-Räume, so ist $\mathfrak{E} = \bigcap \mathfrak{E}^{(j)}$ ein FK-Raum mit den Halbnormen $\varphi_i^{(j)}$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$.*

Beweis. Siehe ZELLER [1951_1, S. 472].

Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix). *Sind die Zahlen $\delta_k \neq 0$ gegeben und ist $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ ein FK-Raum, so bildet die Menge $\mathfrak{E}(\delta_k)$ der Stellen $\mathfrak{a}$, für die $\{a_k \delta_k\} \in \mathfrak{E}$ ist, einen FK-Raum mit den Halbnormen $\varphi_i(\{a_k \delta_k\})$.*

Beweis. Klar.

Kriterium 2.5 (Wechsel der Halbnormen). *$[\mathfrak{E};\varphi_i]$ sei ein FK-Raum. Genau dann ist $\mathfrak{E}$ auch mit den Halbnormen χ_j ein FK-Raum, wenn Ungleichungen folgender Art für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ und $i, j = 0, 1, \ldots$ bestehen:*

$$\varphi_i(\mathfrak{a}) \leqq M_i \cdot \left(\chi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \chi_{j(i)}(\mathfrak{a})\right),$$
$$\chi_j(\mathfrak{a}) \leqq N_j \cdot \left(\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_{i(j)}(\mathfrak{a})\right).$$

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend, weil dann die φ_i und die χ_j dieselbe gleichmäßige Struktur definieren. — Ist sowohl $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ als auch $[\mathfrak{E};\chi_j]$ ein *FK*-Raum, so ist auf Grund bekannter Sätze über Operationen mit abgeschlossenem Graph die kanonische Abbildung von $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ auf $[\mathfrak{E};\chi_j]$ in beiden Richtungen stetig, was die Ungleichungen ergibt. Man vgl. Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von *FK*-Räumen).

Kriterium 2.6 (*FK*- und *BK*-Raum). *Genau dann läßt sich ein FK-Raum $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ als BK-Raum (mit einer gewissen Norm χ) auffassen, wenn es ein r und Zahlen M_i gibt, so daß für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ und $i = 0, 1, \ldots$*

$$\varphi_i(\mathfrak{a}) \leqq M_i \cdot \left(\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_r(\mathfrak{a})\right)$$

gilt.

Beweis. I. Gelten solche Ungleichungen, so ist nach Kriterium 2.5 $\mathfrak{E}$ ein *BK*-Raum mit der Norm $\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_r(\mathfrak{a})$. II. Ist $\mathfrak{E}$ mit einer Norm $\chi(\mathfrak{a})$ ein *BK*-Raum, so folgt aus Kriterium 2.5

$$\varphi_i(\mathfrak{a}) \leq M_i \chi(\mathfrak{a}) \leq M_i \cdot N \cdot (\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_r(\mathfrak{a}))$$

mit einem gewissen $r = i(0)$. — Wir hätten uns beim Beweis auch auf das Normierbarkeitskriterium von KOLMOGOROFF [1934] stützen können.

Wir bezeichnen spezielle Folgenräume durch einen großen deutschen Buchstaben mit anhängendem lateinischen Buchstaben (etwa $\mathfrak{S}_B$). Wir verwenden die Buchstaben $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{R}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{P}$, je nachdem es bei den Elementen $\{a_k\}$ des Raumes auf das Verhalten der a_k selber ankommt ($\mathfrak{S}$: Sequenz-Folge), oder auf die Teilsummen $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ($\mathfrak{T}$: Teilsummen), oder auf die Funktion $a(z) = \sum a_k z^k$ in einem gewissen Gebiet ($\mathfrak{R}$: Reguläre Funktion), oder auf diese Funktion auf einem Strahl ($\mathfrak{Q}$: wegen der Nachbarschaft im Alphabete gewählt), oder auf die Konvergenzeigenschaften der Potenzreihe $\sum a_k z^k$ ($\mathfrak{P}$: Potenzreihe). Der lateinische Buchstabe kennzeichnet das Verhalten der a_k bzw. der Teilsummen usw. näher, etwa $\mathfrak{S}_B$ = Raum der beschränkten Folgen $\{a_k\}$. Aus dem Rahmen fällt die historisch begründete Bezeichnung $\mathfrak{L}_p$ (s. unten).

Als erstes stellen wir fest, daß der Raum $\mathfrak{S}$ aller Folgen komplexer Zahlen ein *FK*-Raum mit den Halbnormen $\varrho_i(\mathfrak{a}) = |a_i|$ ist, was unmittelbar aus der Vollständigkeit des Raumes der komplexen Zahlen folgt. Konvergenz $\mathfrak{a}^{(n)} \to \mathfrak{a}$ im Raum $\mathfrak{S}$ ist gleichbedeutend mit gliedweiser Konvergenz ($a_k^{(n)} \to a_k$ für jedes k). Wir spezialisieren Kriterium 2.1.

Kriterium 2.1a (Unterräume von $\mathfrak{S}$). *$\chi_\iota(\mathfrak{a})$ sei irgendeine Menge stetiger Halbnormen in $\mathfrak{S}$, $\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname{fin}}_\iota \chi_\iota(\mathfrak{a})$ gesetzt. Die Menge der Stellen $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$ bildet dann einen FK-Raum $\mathfrak{F}$ mit den Halbnormen $\chi(\mathfrak{a})$, $|a_0|$, $|a_1|$, ... Gelten überdies Ungleichungen der Form $|a_k| \leq M_k \cdot \chi(\mathfrak{a})$ ($\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$, $k = 0, 1, \ldots$), so ist $\mathfrak{F}$ sogar ein BK-Raum mit der Norm $\chi(\mathfrak{a})$.*

Beweis. $\chi(\mathfrak{a})$ ist als obere Grenze stetiger Halbnormen eine nach unten halbstetige Halbnorm. 2.1 (mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}$) liefert die erste Behauptung, die zweite folgt anschließend mit 2.5.

Mit 2.1a erhalten wir die unten verzeichneten *BK*-Räume. Hinter der Bezeichnung des Raumes und ihrer Erläuterung steht das jeweilige $\chi(\mathfrak{a})$. Zum Raum gehören also genau die $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$, die Norm ist $\chi(\mathfrak{a})$.

$\mathfrak{S}_B$ (beschränkte Folgen): $\overline{\operatorname{fin}}_{k=0,1,\ldots} |a_k|$;

$\mathfrak{T}_B$ (beschränkte Reihen): $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right|$;

$\mathfrak{L}_p$ (p-te Potenz konvergiert): $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p}$ $(p \geq 1)$;

$\mathfrak{P}_B$ (Potenzreihen mit beschränkten Teilsummen): $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \overline{\operatorname{fin}}_{z<1} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Kriterium 2.2 liefert weitere BK-Räume. In der nachstehenden Liste ist neben der Bezeichnung des Raumes (in 2.2 also $\mathfrak{F}$) der jeweilige Oberraum aufgeführt (in 2.2 also $\mathfrak{E}$), sodann die in 2.2 mit χ bezeichnete Halbnorm. (Wir betrachten den Fall, daß die Menge χ_ι aus einer Halbnorm besteht.) Zum Unterraum gehören alle $\mathfrak{a}$ des Oberraumes mit $\chi(\mathfrak{a})=0$, während die Norm von $\mathfrak{a}$ im Unterraum gleich der Norm von $\mathfrak{a}$ im Oberraum ist.

$\mathfrak{S}_C$ (konvergente Folgen): $\mathfrak{S}_B$, $\overline{\lim}_{k,l\to\infty} |a_k - a_l|$;

$\mathfrak{S}_N$ (Nullfolgen): $\mathfrak{S}_B$, $\overline{\lim}_{k\to\infty} |a_k|$;

$\mathfrak{T}_C$ (konvergente Reihen): $\mathfrak{T}_B$, $\overline{\lim}_{m,n\to\infty} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|$;

$\mathfrak{P}_G$ (gleichmäßig konvergente Potenzreihen): $\mathfrak{P}_B$, $\overline{\lim}_{m,n\to\infty} \overline{\text{fin}}_{|z|<1} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k z^k\right|$.

§ 3. Lineare Operationen, Halbnormen und Minoranten.

Übersicht. Wir führen die Minoranten einer Halbnorm ein; das sind reellwertige Funktionen, die sich z. B. durch fin-Bildung von Halbnormen ergeben (3.3). Die obere Grenze von Halbnormen bzw. Minoranten ist wieder eine Halbnorm bzw. Minorante (3.4). Die Hilfssätze 3.1, 3.2 und 3.5 befassen sich mit der Stetigkeit von Halbnormen, Minoranten und linearen Operationen. Schließlich formulieren wir zwei bekannte Lemmata (3.6 und 3.7) über Folgen von Linearformen. An diesen Lemmata werden wir in den §§ 4 bis 6 drei Beweismethoden veranschaulichen.

Wir sagen, daß eine Funktion $\omega(\mathfrak{a})\leqq\infty$ in einem F-Raum $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ die Bedingung $(\mathcal{M})$ erfüllt, wenn es Zahlen m und M gibt, so daß

$$(\mathcal{M}) \qquad \omega(\mathfrak{a})\leqq M\cdot(\varphi_0(\mathfrak{a})+\cdots+\varphi_m(\mathfrak{a})) \qquad (\mathfrak{a}\in\mathfrak{E})$$

gilt. Sind die φ_i monoton, d. h. gilt $\varphi_i(\mathfrak{a})\leqq\varphi_{i+1}(\mathfrak{a})$, oder ist $\mathfrak{E}$ ein B-Raum $[\mathfrak{E};\varphi]$, so vereinfacht sich diese Bedingung zu

$$\omega(\mathfrak{a})\leqq M\cdot\varphi_m(\mathfrak{a}) \quad \text{bzw.} \quad \omega(\mathfrak{a})\leqq M\cdot\varphi(\mathfrak{a}).$$

Hilfssatz 3.1 (Stetige Halbnorm). *Erfüllt eine Halbnorm $\chi(\mathfrak{a})\leqq\infty$ in einem F-Raum $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ die Bedingung $(\mathcal{M})$, so ist $\chi(\mathfrak{a})<\infty$ und stetig. Ist $(\mathcal{M})$ nicht erfüllt, so ist $\chi(\mathfrak{a})$ in keiner offenen Menge des Raumes beschränkt, insbesondere nirgends stetig.*

Beweis. Ist $(\mathcal{M})$ erfüllt, so ist χ jedenfalls im Punkte $\mathfrak{o}$ stetig. Mittels der Dreiecksungleichung überträgt sich dies auf jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$. Ist $(\mathcal{M})$ nicht erfüllt, so konstruiert man Elemente $\mathfrak{a}^{(n)}$, die im F-Raum $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{o}$ konvergieren, so daß $\chi(\mathfrak{a}^{(n)})\to\infty$ geht (vgl. etwa ZELLER [1951, S. 467]). χ ist also in keiner Umgebung des Nullpunktes beschränkt. Mit der Dreiecksungleichung überträgt sich dies auf jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$.

Die Funktion $\psi(\mathfrak{a})\leqq\infty$ heißt Minorante oder Unternorm der Halbnorm $\chi(\mathfrak{a})\leqq\infty$, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

$$(\Delta') \qquad \begin{gathered} 0\leqq\psi(\mathfrak{a})\leqq\chi(\mathfrak{a}), \qquad \psi(\lambda\,\mathfrak{a})=|\lambda|\cdot\psi(\mathfrak{a}), \\ \psi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\leqq\psi(\mathfrak{a})+\chi(\mathfrak{b}). \end{gathered}$$

Die Dreiecksungleichung ist also durch die kompliziertere Bedingung Δ' ersetzt. 3.1 läßt sich in gewissem Umfang auf Minoranten übertragen.

Hilfssatz 3.2 (Stetige Minorante). *$\psi(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ sei Minorante der Halbnorm $\chi(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ im F-Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$. I. Ist χ stetig, so auch ψ. II. Erfüllt ψ nicht $(\mathcal{M})$ und liegen die Punkte $\mathfrak{b}$ mit $\chi(\mathfrak{b}) < \infty$ dicht im Raum $\mathfrak{E}$, so ist ψ in keiner offenen Menge beschränkt.*

Beweis. Δ' liefert nach Umrechnung

$$(\Delta'') \qquad \psi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \geqq \psi(\mathfrak{a}) - \chi(-\mathfrak{b}).$$

I. Dies folgt aus Δ' und Δ''. II. Wir konstruieren eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)} \to \mathfrak{o}$ mit $\psi(\mathfrak{a}^{(n)}) \to \infty$ (vgl. 3.1). Ist $\mathfrak{O}$ irgendeine offene Menge im F-Raum $\mathfrak{E}$, so wählen wir ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{O}$ mit $\chi(-\mathfrak{b}) < \infty$. Setzt man in Δ'' $\mathfrak{a}^{(n)}$ statt $\mathfrak{a}$ ein, so ergibt sich die Behauptung.

Minoranten von Halbnormen werden bei uns für gewisse Divergenzfragen von Bedeutung sein (10.4, 11.5). Mit Rücksicht auf diese Anwendungen sind die übrigens nicht unabhängigen Axiome der Minorante gewählt. Die meisten Folgerungen über Minoranten lassen sich jedoch auf schwächeren Forderungen aufbauen. Die beiden nächsten Hilfssätze zeigen, in welchem Zusammenhang man auf Minoranten stößt.

Hilfssatz 3.3 (fin von Halbnormen). *Für jedes z einer Menge Z sei $\chi(\mathfrak{a}; z) \leqq \infty$ eine Halbnorm ein und desselben linearen Raumes. Dann ist die Funktion*

$$\psi(\mathfrak{a}) = \operatorname*{fin}_{z \in Z} \chi(\mathfrak{a}; z) \leqq \infty$$

Minorante der Halbnorm

$$\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname*{fin}_{z \in Z}} \chi(\mathfrak{a}; z) \leqq \infty .$$

Beweis. Einfache Rechnung.

Hilfssatz 3.4 ($\overline{\text{fin}}$ von Halbnormen und Minoranten). *Ist für jedes r einer Menge R die Funktion $\psi(\mathfrak{a}; r) \leqq \infty$ Minorante der Halbnorm $\chi(\mathfrak{a}; r) \leqq \infty$ ($\mathfrak{a}$ variiere in einem linearen Raum), so ist*

$$\psi(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname*{fin}_{r \in R}} \psi(\mathfrak{a}; r) \leqq \infty$$

Minorante der Halbnorm

$$\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname*{fin}_{r \in R}} \chi(\mathfrak{a}; r) \leqq \infty .$$

Sind die $\psi(\mathfrak{a}; r)$ bzw. $\chi(\mathfrak{a}; r)$ stetig, so ist ψ bzw. χ nach unten halbstetig.

Beweis. Klar.

Hilfssatz 3.5 (Lineare stetige Operationen). *Eine lineare Operation T, die einen F-Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ in einen ebensolchen $[\mathfrak{F}; \chi_j]$ abbildet, ist genau dann stetig, wenn die Halbnormen $\chi_j(T\mathfrak{a})$ $(j = 0, 1, \ldots)$ in $\mathfrak{E}$ stetig sind, also die Bedingung $(\mathcal{M})$ (s. oben) erfüllen.*

Beweis. Klar.

Die bekannten Lemmata 3.6 und 3.7 dienen uns zur Erläuterung der in den folgenden Paragraphen besprochenen Beweismethoden (vgl. Einleitung).

Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen). *$[\mathfrak{E};\varphi]$ sei ein B-Raum, $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_n\rangle$ $(n=0,1,\ldots)$ stetige Linearformen in $\mathfrak{E}$. Gilt $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \|\mathfrak{a}'_n\| = \infty$, so gibt ein $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_n\rangle| = \infty$.* (Für die Definition von $\|\mathfrak{a}'_n\|$ vgl. §

Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen). *$[\mathfrak{E};\varphi]$ sei ein B-Raum die $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np}\rangle$ $(n,p=0,1,\ldots)$ stetige Linearformen in $\mathfrak{E}$. Gibt es zu jedem p ein $\mathfrak{a}_p$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}_p, \mathfrak{a}'_{np}\rangle| = \infty$, so auch ein $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np}\rangle| =$ für alle $p=0,1,\ldots$.*

§ 4. Der gleitende Buckel.

Übersicht. Die Methode des gleitenden Buckels besteht darin, daß man ein Element mit den Eigenschaften $E_0, E_1, \ldots$ aus Elementen $\mathfrak{a}_k$ mit der Eigenschaft E_k in For einer Reihe $\sum \alpha_k \mathfrak{a}_k$ zusammensetzt, wobei man darauf achtet, daß sich die $\mathfrak{a}_k$ gege seitig nicht stören, daß also bezüglich E_k das Element $\mathfrak{a}_k$ in der Summe den Haupteinflu (Buckel!) ausübt. Wie man diese Störungsfreiheit erzielt, ist aus den unten gezeigte verhältnismäßig einfachen Beweisanordnungen für die Lemmata 3.6 und 3.7 zu sehe Wir weisen auch auf einen prinzipiellen Vorteil des „Buckels" gegenüber den Methode aus §§ 5 und 6 hin, der unter anderem in 11.2 zur Geltung kommt. Der Grundgedanl der Methode stammt von LEBESGUE [1909] und TOEPLITZ [1911].

Beweis zu Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen). Wir können $\mathfrak{a}'_n \neq$ voraussetzen. Zu jedem $n=0,1,\ldots$ gibt es ein $\mathfrak{a}_n\in\mathfrak{E}$ mit

$$|\langle \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}'_n\rangle| > \tfrac{3}{4}\|\mathfrak{a}'_n\|, \quad \|\mathfrak{a}_n\| < 1.$$

Wir dürfen annehmen, daß

$$M_n = \overline{\operatorname{fin}}_{k=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}'_k\rangle| < \infty \qquad (n=0,1,\ldots)$$

gilt, sonst wäre ja nichts mehr zu beweisen. Wir wählen eine Folge natür licher Zahlen $n_0 < n_1 < \ldots$ nach der induktiven Vorschrift: $n_0 = 0$; sin $n_0, \ldots, n_{r-1}$ bestimmt, so wird n_r so gewählt, daß

$$\tfrac{1}{4} 5^{-r} \|\mathfrak{a}'_{n_r}\| > r \quad \text{und} \quad > \sum_{k=0}^{r-1} 5^{-k} M_{n_k}$$

gilt (dies ist möglich wegen $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \|\mathfrak{a}'_n\| = \infty$). Das Element $\mathfrak{a} = \sum 5^{-k} \mathfrak{a}_{n_k}$ gehör wegen der Vollständigkeit zum Raum $\mathfrak{E}$. Es ist

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} 5^{-k} \mathfrak{a}_{n_k}, \mathfrak{a}'_{n_r} \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{r-1} + \sum_{k=r}^{r} + \sum_{k=r+1}^{\infty} 5^{-k} \mathfrak{a}_{n_k}, \mathfrak{a}'_{n_r} \right\rangle = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III};$$

$$|\mathrm{I}| = \left|\sum_{k=0}^{r-1} 5^{-k} \langle \mathfrak{a}_{n_k}, \mathfrak{a}'_{n_r}\rangle\right| \leqq \sum_{k=0}^{r-1} 5^{-k} M_{n_k} < \tfrac{1}{4} 5^{-r} \|\mathfrak{a}'_{n_r}\|,$$

$$|\mathrm{II}| = 5^{-r} |\langle \mathfrak{a}_{n_r}, \mathfrak{a}'_{n_r}\rangle| > 5^{-r} \tfrac{3}{4} \|\mathfrak{a}'_{n_r}\|,$$

$$|\mathrm{III}| = \left|\left\langle \sum_{k=r+1}^{\infty} 5^{-k} \mathfrak{a}_{n_k}, \mathfrak{a}'_{n_r} \right\rangle\right| < \left(\sum_{k=r+1}^{\infty} 5^{-k} \cdot 1\right) \|\mathfrak{a}'_{n_r}\| = \frac{5^{-r}}{4} \|\mathfrak{a}'_{n_r}\|.$$

Die Abschätzungen lehren

$$|\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{n_r}\rangle| > \tfrac{1}{4}\, 5^{-r}\, \|\mathfrak{a}'_{n_r}\| > r,$$

also

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_n\rangle| = \infty,$$

w. z. b. w.

In manchen Spezialfällen lassen sich die Abschätzungen vereinfachen, nämlich dann, wenn die Linearformen $\mathfrak{a}'_n$ in gewissem Sinn unabhängig sind, wofür wir als krassen Fall das Beispiel $\mathfrak{E} = \Xi_N$ (vgl. § 2), $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_k\rangle = k \cdot a_k$ anführen. Der Name gleitender Buckel erklärt sich so, daß in $\langle \sum 5^{-k} \mathfrak{a}'_{n_k}, \mathfrak{a}'_{n_r}\rangle$ für jedes r ein anderes Glied der Reihe für das Großwerden der Summe (Buckel!) verantwortlich ist, während die restlichen Glieder nur geringen Einfluß ausüben. Die Voraussetzungen wurden nur zum Teil ausgenützt. So können wir statt Linearformen auch Halbnormen und Minoranten betrachten. Ein prinzipieller Vorteil des „Buckels" im Vergleich zu den Methoden aus §§ 5 und 6 liegt weiter darin, daß man unter Umständen $\mathfrak{a}$ in Gestalt einer divergenten (d. h. nicht im Sinne der Norm des Raumes konvergenten) Reihe darstellen kann — s. Hilfssatz 11.2 (Randwerte bei beschränkten Funktionen) und Hilfssatz 12.2 (Randwerte bei beschränkten unstetigen Funktionen).

Beweis von Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen). Wir dürfen $\sum \|\mathfrak{a}_p\| < \infty$ annehmen. Wir bestimmen mittels induktiver Vorschrift Zahlen $\xi_0, \xi_1, \ldots$ mit $0 < \xi_k \leq 1$ und natürliche Zahlen $n = n(p, m)$ $(0 \leq p \leq m;$ $m = 0, 1, \ldots)$ so, daß

$$\left|\left\langle \sum_{k=0}^{l} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| > m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m \leq l,\ l = 0, 1, \ldots$$

gilt. Denn dann ist $\mathfrak{a} = \sum \xi_k \mathfrak{a}_k$ konvergent und

$$|\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np}\rangle| \geq m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m,\ m = 0, 1, \ldots,$$

d. h.

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np}\rangle| = \infty \qquad (p = 0, 1, \ldots).$$

Die Bestimmung erfolgt so: Sind $\xi_0, \ldots, \xi_l$ und $n(p, m)$ für $0 \leq p \leq m \leq l$ schon derart definiert, daß

$$(1) \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| = \infty \qquad (p = 0, \ldots, l),$$

$$(2) \qquad \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| > m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m \leq l$$

gilt, so wählen wir ξ_{l+1} so, daß

$$(1') \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l+1} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| = \infty \qquad (p = 0, \ldots, l+1),$$

$$(2') \qquad \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l+1} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| > m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m \leq l$$

gilt. Dies ist möglich, weil Bedingung (1') nur endlich viele Werte für ξ_{l+1} ausschließt und (2') zu erfüllen ist, indem man ξ_{l+1} so klein wählt, daß das im Vergleich zu (2) neu hinzukommende Glied $\xi_{l+1}\,\mathfrak{a}_{l+1}$ keinen wesentlichen Einfluß in den betreffenden endlich vielen Ungleichungen ausübt. Sodann legen wir vermöge (1') $n(p, l+1)$ $(0 \leqq p \leqq l+1)$ so fest, daß

$$(2'') \qquad \left\langle \sum_{k=0}^{l+1} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{n\,p} \right\rangle > l+1 \quad \text{für} \quad n = n(p, l+1), \quad 0 \leqq p \leqq l+1$$

ist. (2') und (2'') zusammen ergeben Bedingung (2) mit $l+1$ an Stelle von l. Entsprechendes gilt für (1') und (1). Mit den Anfangswerten $\xi_0 = 1$, $n(0, 0)$ geeignet gewählt, haben wir die gesuchte induktive Vorschrift.

Wir erkennen hier als Nachteil des „Buckels", daß umfangreiche Rechnungen nötig sind. Der Beweis vereinfacht sich jedoch wesentlich, wenn man

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}'_{n\,p} \rangle| < \infty \quad \text{für} \quad p \neq r$$

annehmen darf.

§ 5. Unterhalb stetige Funktionen.

Übersicht. Aufbauend auf einem bekannten Magerkeitssatz von BAIRE (5.1) erhält man Bedingungen, unter denen eine nach unten halbstetige Funktion bzw. Halbnorm bzw. Minorante $\omega(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ den Wert ∞ annimmt (5.2 bis 5.4). Mit 5.3 ergeben sich sofort die Lemmata 3.6 und 3.7. Der Grundgedanke dieser Methode stammt von SAKS (siehe BANACH-STEINHAUS [1927]). In etwas abgeänderter Formulierung findet man 5.3 bei BANACH [1932, S. 19], und bei GELFAND [1936]. Satz 5.4 ist mit einem Ergebnis von BANACH [1931] verwandt.

Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire). *Ist $\mathfrak{M}$ eine magere Menge in einem vollständigen metrischen Raum $\mathfrak{E}$, so gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, $\mathfrak{a} \notin \mathfrak{M}$.*

Bemerkung. Für die Anwendung beachte man, daß die Vereinigung abzählbar vieler magerer Mengen wieder eine magere Menge ist, wie direkt aus der Definition zu ersehen ist.

Lemma 5.2 (Unbeschränkte halbstetige Funktion). *$\mathfrak{E}$ sei ein vollständiger metrischer Raum, $\omega(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ eine nach unten halbstetige Funktion in $\mathfrak{E}$. Ist $\omega(\mathfrak{a})$ in keiner offenen Teilmenge von $\mathfrak{E}$ nach oben beschränkt, so gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\omega(\mathfrak{a}) = \infty$. Genauer: Die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\omega(\mathfrak{a}) = \infty$ ist fett.*

Lemma 5.3 (Halbstetige Halbnorm). *Eine nach unten halbstetige Halbnorm $\chi(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ in einem F-Raum $\mathfrak{E}$ ist genau dann stetig, wenn $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ gilt. Ist letzteres nicht der Fall, so ist die Menge der $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) = \infty$ fett.*

Beweise. Der einfache Beweis von 5.1 ist bekannt (vgl. BANACH [1932, S. 14]). Aus 5.1 folgt leicht 5.2 (für die Beweismethode vgl. man BANACH [1932, S. 19]). 5.3 erhält man nun mit Hilfssatz 3.1 (Stetige Halbnorm).

Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen) und Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearfolgen) gewinnt man durch Anwendung von 5.3 auf die Halbnormen

$$\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_n \rangle| \leqq \infty \quad \text{bzw.} \quad \chi_p(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{n\,p} \rangle| \leqq \infty$$

(vgl. Hilfssatz 3.4 über die obere Grenze von Halbnormen). Mit Hilfssatz 3.2 (Stetige Minorante) an Stelle von 3.1 erhalten wir eine Variante von 5.3:

Satz 5.4 (Halbstetige Minorante). *$\psi(\mathfrak{a}) \geqq \infty$ sei eine nach unten halbstetige Minorante der Halbnorm $\chi(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ im F-Raum $\mathfrak{E}$. Die Stellen $\mathfrak{b}$ mit $\chi(\mathfrak{b}) < \infty$ mögen in $\mathfrak{E}$ dicht liegen, ψ erfülle nicht die Bedingung $(\mathcal{M})$ aus § 3 (d.h. sei in keiner Umgebung von $\mathfrak{o}$ beschränkt). Dann gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\psi(\mathfrak{a}) = \infty$. Genauer: Die Menge der $\mathfrak{a}$ mit $\psi(\mathfrak{a}) = \infty$ ist fett.*

Wir bemerken noch, daß man ein $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) = \infty$ in 5.3 bzw. mit $\psi(\mathfrak{a}) = \infty$ in 5.4 durch eine Konstruktion erhält, die große Ähnlichkeit mit der Konstruktion beim „gleitenden Buckel" (§ 4) aufweist (betrachte den bekannten Beweis von 5.1 mit der „Kugelschachtelung").

§ 6. Produkträume.

Übersicht. Der Produktraum $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ zweier F-Räume ist wieder ein F-Raum. Lemma 6.1 bringt eine Magerkeitsaussage über lineare abgeschlossene Unterräume in $\mathfrak{G}$, die auf Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) beruht. Eine Abbildung T mit Erklärungsbereich $\mathfrak{E}_0$ in $\mathfrak{E}$ und Wertbereich in $\mathfrak{F}$ heißt Operation mit abgeschlossenem Graph, wenn die Menge der Elemente $(\mathfrak{a}, T\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0)$ in $\mathfrak{G}$ abgeschlossen ist. Für solche Operationen erhält man aus 6.1 bekannte Aussagen über Stetigkeit, Bild- und Erklärungsbereich (6.2 bis 6.4). Es ergeben sich wieder Beweise für 3.6 (Folgen von Linearformen) und 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen), wobei man allgemeiner Folgen linearer Operationen in F-Räumen betrachten kann. — Die grundlegende Beweisidee stammt von Schauder [1930]; vgl. auch Banach [1932, S. 38] und Hille [1948, S. 29].

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume. Der Produktraum $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ aller Paare $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{F}$ läßt sich dann in naheliegender Weise als F-Raum auffassen (lineare Verknüpfung in natürlicher Weise erklären, Halbnormen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ übernehmen! Vgl. auch Bourbaki [1940, S. 42]).

Lemma 6.1 (Komponenten in Produkträumen). *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume, $\mathfrak{H}$ ein linearer abgeschlossener Unterraum in $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$. Die Menge $\mathfrak{E}(\mathfrak{H})$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, die in einem Element $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{H}$ vorkommen, sei nichtmager. Dann ist sogar $\mathfrak{E}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{E}$; und zu jeder Umgebung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{F}$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{E}$, so daß jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}$ in einem Element $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{b} \in \mathfrak{V}$ vorkommt.*

Wir unterdrücken den Beweis, weil sich fast wörtlich das Beweisschema von Schauder [1930] anwenden läßt, das sich z.B. wieder bei Banach [1932, S. 38] und Hille [1948, S. 29] findet.

Ist T eine Operation von $\mathfrak{E}_0 < \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, so wird die Menge der Elemente $(\mathfrak{a}, T\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0)$ als der Graph von T bezeichnet. Hier interessiert der Fall, daß der Graph im Produktraum $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ abgeschlossen ist, was sich bei Verwendung von Elementfolgen so ausdrückt:

Aus $\mathfrak{a}^{(n)} \to \mathfrak{a}$, $T\mathfrak{a}^{(n)} \to \mathfrak{b}$ folgt $T\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Ein solches T wird deshalb auch „fehlkonvergenzfrei" genannt. Diese Eigenschaft verlangt etwas weniger als Stetigkeit, so daß der folgende Satz ein (wichtiges) Stetigkeitskriterium liefert:

Lemma 6.2 (Operation mit abgeschlossenem Graph). *Eine lineare Operation T mit abgeschlossenem Graph, die einen F-Raum $\mathfrak{E}$ in einen ebensolchen $\mathfrak{F}$ abbildet, ist stetig.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei die Menge der Elementpaare der Gestalt $(\mathfrak{a}, T\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E})$, also der Graph von T. Lemma 6.1 ergibt mit der $\mathfrak{B}$-II-Bedingung, daß T im Nullpunkt, also überall stetig ist.

Bemerkung. Eine „additive" Operation T mit abgeschlossenem Graph ist linear. Denn für rationales λ ist jedenfalls $T(\lambda\,\mathfrak{a}) = \lambda\, T(\mathfrak{a})$. Grenzübergang ergibt die Behauptung. Daher gilt 6.2 auch schon unter der engeren Voraussetzung der Additivität (s. BANACH [1932, S. 41]; beim Beweis fehlt dort die obige Bemerkung).

Lemma 6.3 (Bildraum stetiger Operationen). *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume, T eine lineare stetige Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$. Dann ist die Menge der in der Form $\mathfrak{b} = T\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E})$ darstellbaren $\mathfrak{b} \in \mathfrak{F}$ entweder mager in $\mathfrak{F}$ oder $= \mathfrak{F}$.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei die Menge der Elementpaare $(T\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E})$. Als stetige Operation besitzt T einen abgeschlossenen Graph, also läßt sich 6.1 anwenden.

Lemma 6.4 (Erklärungsbereich von Operationen mit abgeschlossenem Graph). *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume, T eine lineare Operation, die in einem linearen Unterraum $\mathfrak{E}_0$ von $\mathfrak{E}$ erklärt ist und diesen in $\mathfrak{F}$ abbildet. Der Graph von T sei in $(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ abgeschlossen. Dann ist entweder $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E}_0$ mager in $\mathfrak{E}$.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei wieder die Menge der Paare $(\mathfrak{a}, T\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0)$. Lemma 6.1 liefert den Beweis.

Wir kommen auf Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen) und Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen) zurück.

Zu 3.6. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{E}_0$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $T\mathfrak{a} = \{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_k' \rangle\} \in \mathfrak{S}_B$. Die Abbildung $\mathfrak{a} \to T\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}_0$ in $\mathfrak{S}_B$ hat wegen der Stetigkeit der Linearformen und der koordinatenweisen Konvergenz in $\mathfrak{S}_B$ einen abgeschlossenen Graph in $(\mathfrak{E}, \mathfrak{S}_B)$. Natürlich ist auch sie linear. Gäbe es kein $\mathfrak{a}$ der in 3.6 genannten Art, so wäre $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}$ und T nach Lemma 6.2 stetig, was aber im Widerspruch zu $\overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \, \|\mathfrak{a}_n'\| = \infty$ steht.

Zu 3.7. Nach Lemma 6.4 ist für jedes $p = 0, 1, \ldots$ die Menge der $\mathfrak{a}$ mit $\overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \, |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{np}' \rangle| < \infty$ mager in $\mathfrak{E}$ (man überlegt sich wie oben, daß 6.4 anwendbar ist). Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) vollendet den Beweis.

Einige Bemerkungen am Rande: Diese Sätze und Methoden lassen sich auf Folgen von Operationen (in F-Räumen) übertragen. Der Raum $\mathfrak{F}_B$ der in einem F-Raum $[\mathfrak{F}; \chi_j]$ beschränkten Folgen $\mathfrak{a}^{(n)}$ bildet einen F-Raum mit den Halbnormen $\overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \, \chi_j(\mathfrak{a}^{(n)})$ $(j = 0, 1, \ldots)$; Beweis ähnlich wie bei $\mathfrak{S}_B$ in § 2. Sind die T_n lineare stetige Operationen, die den F-Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ in $\mathfrak{F}$ abbilden, so ist genau dann $T_n\mathfrak{a}$ für jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ eine beschränkte Folge, wenn $\mathfrak{a} \to \{T_n\mathfrak{a}\}$ eine stetige Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}_B$ ist (Beweis wie oben für 3.6), was sich durch Ungleichungen der Form

$$\overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \, \chi_j(T_n\mathfrak{a}) \leq M_j\left(\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_{i(j)}(\mathfrak{a})\right) \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

ausdrückt. Da die Menge $\mathfrak{F}_C$ der in $\mathfrak{F}$ konvergenten Folgen $\mathfrak{a}^{(n)}$ einen abgeschlossenen Unterraum in $\mathfrak{F}_B$ bildet, so existiert genau dann $\lim_{n\to\infty} T_n\mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$, wenn $T_n\mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$ eine beschränkte Folge bildet und $\lim_{n\to\infty} T_n\mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a}$ einer Grundmenge in $\mathfrak{E}$ existiert. Entsprechendes gilt für Konvergenz gegen Null, schwache Konvergenz usw. Schließlich zeigt Lemma 6.4, daß die Menge der $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$ mit beschränkter Folge $T_n\mathfrak{a}$ entweder mager ist oder ganz $\mathfrak{E}$ umfaßt. Analoges gilt natürlich für „konvergente Folge" usw. Man vgl. dazu Mazur-Orlicz [1933].

Auf der Methode der Produkträume, die bis jetzt im Schrifttum etwas vernachlässigt wurde, beruhen die Sätze des § 7 und damit die meisten Ergebnisse dieser Arbeit. Jedoch erhält man viele der funktionentheoretischen Resultate auch mit dem „Buckel" (§ 4) oder den „Halbstetigen Funktionen" (§ 5). Bei *FK*-Räumen, die nach Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) mittels halbstetiger Halbnormen definiert werden, läuft die Anwendung der Methoden aus § 5 und § 6 auf dasselbe hinaus.

§ 7. Sätze über *FK*-Räume.

Übersicht. Wir stellen einige Sätze über *FK*-Räume zusammen, die wir bei den folgenden Anwendungen gebrauchen werden. Diese Sätze beruhen auf den beiden Grundsäulen der Funktionalanalysis, dem Hahn-Banachschen Erweiterungssatz und dem Baireschen Magerkeitssatz, und lassen sich großenteils mit den in §§ 4 bis 6 beschriebenen Methoden gewinnen. Zuerst beschäftigen wir uns mit *FK*-Räumen $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$, die der Beziehung $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}$ genügen. Dabei vergleichen wir die Topologien (7.1) und die Halbnormen (7.2) dieser Räume. 7.2 ist wichtig für den Nachweis $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{F}$, während man mit 7.3 mittels einer Grundmengenbedingung häufig $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{F}$ zeigen kann. In 7.4 betrachten wir die Vereinigung von *FK*-Räumen $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(j=0, 1, \ldots)$. Gilt für einen *FK*-Raum $\mathfrak{F}$ die Beziehung $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{E}^{(j)}$ für jedes j, so auch $\mathfrak{F}\subset\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$. 7.6 bringt eine ähnliche Aussage für den Durchschnitt von *FK*-Räumen, während in 7.5 die Konvergenz in einem *FK*-Raum $\bigcap\mathfrak{E}^{(j)}$ mit der Konvergenz in jedem einzelnen $\mathfrak{E}^{(j)}$ in Verbindung gebracht werden. 7.6 ist neu, die übrigen Lemmata stammen im wesentlichen aus früheren Arbeiten des Verfassers.

Lemma 7.1 (Vergleich der Topologien von *FK*-Räumen). *Sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ FK-Räume mit $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{F}$, so ist die von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{E}$ induzierte gleichmäßige Struktur gröber als die von $\mathfrak{E}$. Entsprechendes gilt für die schwache gleichmäßige Struktur. Ist $\mathfrak{E}=\mathfrak{F}$, so haben beide Räume dieselbe gleichmäßige Struktur. Ist $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}=\mathfrak{E}$, so bildet $\mathfrak{E}$ eine magere Menge im FK-Raum $\mathfrak{F}$.*

Bemerkung. Es ist also die kanonische Abbildung $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ gleichmäßig stetig; und eine in $\mathfrak{E}$ beschränkte, konvergente, schwach konvergente, Cauchysche, schwach Cauchysche Folge hat bzw. dieselben Eigenschaften in $\mathfrak{F}$.

Beweis. Nach Zeller [1951, S. 471] ist die eben genannte Abbildung $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ stetig, daher als lineare Abbildung sogar gleichmäßig stetig. Dies ergibt die Behauptung über die „starke" Struktur und damit auch über die „schwache" Struktur. Die Magerkeitsaussage folgt mit Lemma 6.3 (Bildraum stetiger Operationen).

Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von *FK*-Räumen). *Sind* $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ *und* $[\mathfrak{F};\chi_j]$ *FK-Räume mit* $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}$, *so genügt jede Halbnorm* χ_j *in* $\mathfrak{E}$ *der Bedingung* $(\mathcal{M})$ *aus* § 3 [die mit $M=M(j)$ und $m=m(j)$

$$\chi_j(\mathfrak{a}) \leq M\cdot(\varphi_0(\mathfrak{a})+\cdots+\varphi_m(\mathfrak{a})) \qquad (\mathfrak{a}\in\mathfrak{E})$$

lautet und sich in Spezialfällen noch vereinfachen läßt — s. § 3].

Beweis. Nach 7.1 ist die Abbildung $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ stetig. Hilfssatz 3.5 (Lineare stetige Operation) ergibt die Behauptung.

Lemma 7.3 (Grundmengenbedingung). $\mathfrak{E}$ *und* $\mathfrak{F}$ *seien FK-Räume,* $\mathfrak{E}_0$ *eine Grundmenge in* $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}_0$ *ein linearer abgeschlossener Unterraum in* $\mathfrak{F}$. *Aus* $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{E}_0<\mathfrak{F}_0$ *folgt dann* $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}_0$.

Beweis. Dies ergibt sich wieder aus der Stetigkeit der Abbildung $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ (vgl. 7.1).

Lemma 7.4 (Vereinigung von *FK*-Räumen). *Sind die* $\mathfrak{E}^{(j)}$ *und* $\mathfrak{F}$ *FK-Räume und gilt* $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{E}^{(j)}$ $(j=0,1,\ldots)$, *so auch* $\mathfrak{F}\subset\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$. *Genauer ist* $\mathfrak{F}\cap\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$ *eine magere Menge im FK-Raum* $\mathfrak{F}$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)}\neq\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)}$ ist ein *FK*-Raum — s. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von *FK*-Räumen). Nach 7.1 ist $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)}$, also auch $\bigcup(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)})=\mathfrak{F}\cap\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$ mager in $\mathfrak{F}$. Nach Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) gilt $\mathfrak{F}\cap\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}\neq\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}\not\subset\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$.

Lemma 7.5 (Konvergenz im Durchschnitt von *FK*-Räumen). *Der FK-Raum* $[\mathfrak{E};\varphi_i^{(j)}]$ *sei der Durchschnitt der FK-Räume* $[\mathfrak{E}^{(j)},\varphi_i^{(j)}]$ — *vgl. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von FK-Räumen). Eine Folge* $\mathfrak{a}^{(n)}$ *in* $\mathfrak{E}$ *ist genau dann eine Cauchysche, konvergente, schwach Cauchysche, schwach konvergente, beschränkte Folge, wenn sie die betreffende Eigenschaft in jedem* $\mathfrak{E}^{(j)}$ *hat.*

Beweis. Dies folgt aus der Gestalt der Halbnormen in $\mathfrak{E}$ — vgl. Kriterium 2.3 — und der Darstellung der stetigen Linearformen in $\mathfrak{E}$ — s. ZELLER [1951, S. 472].

Lemma 7.6 (Abschnittsdichte im Durchschnitt von *FK*-Räumen). *Die* $[\mathfrak{E}^{(j)};\varphi_i^{(j)}]$ *seien FK-Räume, die die Menge* $\mathfrak{A}$ *der abbrechenden Folgen enthalten; es gelte* $\mathfrak{E}^{(j)}\supset\mathfrak{E}^{(j+1)}$, $\mathfrak{A}$ *liege dicht in jedem* $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(j=0,1,\ldots)$. *I. Dann liegt* $\mathfrak{A}$ *auch dicht im FK-Raum* $\mathfrak{E}=\bigcap\mathfrak{E}^{(j)}$ [*vgl. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von FK-Räumen)*]. *II. Ist* $[\mathfrak{F};\chi]$ *ein BK-Raum mit* $\mathfrak{E}^{(j)}\subset\mathfrak{F}$ $(j=0,1,\ldots)$, *so gilt auch* $\bigcap\mathfrak{E}^{(j)}\not\subset\mathfrak{F}$.

Bemerkung. 7.6 II ist also ein Seitenstück zu 7.4.

Beweis. I. Sei l fest gewählt, $\mathfrak{a}$ irgendein Element aus $\mathfrak{E}$. Es gibt Stellen $\mathfrak{b}^{(n)}\in\mathfrak{A}$, die im *FK*-Raum $\mathfrak{E}^{(l)}$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergieren, also wegen 7.1 auch in den *FK*-Räumen $\mathfrak{E}^{(i)}$ $(0\leq j\leq l)$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergieren. Daher erfüllt eines der $\mathfrak{b}^{(n)}$, das wir mit $\mathfrak{a}^{(l)}$ bezeichnen wollen, die Beziehung

$$\varphi_i^{(j)}(\mathfrak{a}^{(l)}-\mathfrak{a})<\frac{1}{l+1} \qquad (0\leq i,j\leq l).$$

Wir erhalten so Stellen $\mathfrak{a}^{(l)}\in\mathfrak{A}$ $(l=0,1,\ldots)$, die in $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergieren.

II. Wir dürfen $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$ annehmen. Wieder sei l fest und $\mathfrak{b}$ sei eine Stelle mit $\mathfrak{b} \in \mathfrak{E}^{(l)}$, $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{F}$. Wir bestimmen Stellen $\mathfrak{b}^{(n)} \in \mathfrak{A}$, die in $\mathfrak{E}^{(l)}$ gegen $\mathfrak{b}$ konvergieren. $\mathfrak{b}^{(n)}$ ist in $\mathfrak{E}^{(l)}$, also nach 7.4 in jedem $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(0 \leq j \leq l)$ eine Cauchysche Folge, aber wegen $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{F}$ keine Cauchysche Folge in $\mathfrak{F}$. Unter den Stellen der Form $\beta\,(\mathfrak{b}^{(m)} - \mathfrak{b}^{(n)})$ (β beliebig komplex) können wir daher ein $\mathfrak{a}^{(l)}$ finden, das

$$q_i^{(j)}(\mathfrak{a}^{(l)}) < \frac{1}{l+1}\,(0 \leq i, j \leq l), \quad \chi(\mathfrak{a}^{(l)}) > 1$$

genügt. Die so gewonnene Folge $\mathfrak{a}^{(l)}$ konvergiert in $\mathfrak{E}$, aber nicht in $\mathfrak{F}$ gegen Null, was $\mathfrak{E} < \mathfrak{F}$ ausschließt (s. 7.1).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 24. Februar 1953.)

Foster, A. L.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 306—336 (1953)

Generalized "Boolean" theory of universal algebras.

Part I.

Subdirect sums and normal representation theorem.

By
Alfred L. Foster.

1. Introduction. One particular property of the Boolean realm, namely the fundamental structure theorem that every Boolean algebra (or ring) is isomorphically representable as an algebra (ring) of classes (Stone [*1*]), has been reformulated and substantially extended by Birkhoff [*2*], McCoy [*3*]–[*6*], McCoy and Montgomery [*7*], Foster [*8*]–[*13*], Wade [*14*], Krull [*15*], and others. In particular, for instance ([*6*], [*10*], [*11*], [*14*]) it is known that:

(i) Each p-ring (algebra) and, more generally, each p^k-ring (algebra) is isomorphic with a subdirect sum of F_p (= field of residues, mod p), respectively of F_{p^k} (= Galois field of p^k elements).

As illustrated in (i), the extensions referred to lean on the notion of *subdirect sum*—a simple and natural restriction of the broader concept of "subalgebra of a direct sum"—as defined and studies (for universal algebras) by Birkhoff [*2*]. Again, these extensions do not elevate properties of Boolean theory other than the fundamental structure theorem.

In this connection, as an application of the *K-ality theory* (see [*8*] for outline) the author has shown in a series of recent publications ([*8*]–[*12*]) that p-rings and p^k-rings constitute generalizations of the Boolean realm not merely in the narrower sense (i) above, but actually in the widest sense: all concepts and theorems on the Boolean (i.e., $p = p^k = 2$) level possess p- and p^k-level extensions. In particular we recall that

(ii) The familiar duality principle generalizes to a certain p-ality (respectively p^k-ality) principle.

(iii) Each p-ring is a ring-algebra (also called ring-logic), and similarly for each p^k-ring.

(iv) The well known canonical or *normal* representation theorems for Boolean functions generalize to various normal representation theorems for p- (respectively p^k-) functions.

We propose to exhibit this wide extension of the Boolean domain on a considerably broader front. Let us call the algebras (*in casu*, fields) F_p and F_{p^k} the *kernels* of the p- and p^k-extensions. It will be shown that a parallel extension exists corresponding to each preassigned *f-algebra* as kernel; here an f-algebra (§ 2) is a rather general genus of universal algebra. More specifically, in the current Part I of this development we shall in considerable measure be concerned with the exhibition of the property (iv)—and, of course also of (i)—on the universal (= f-algebra) level. Corresponding to a given

kernel, $\mathfrak{U}$, we shall characterize a class $[\mathfrak{U}]$ of algebras, and a class $(\mathfrak{U})$ of subdirect sums of $\mathfrak{U}$ which are coextensive in the sense: each $\in [\mathfrak{U}]$ satisfies (a generalized version of) (iv) and is isomorphic with an $\in (\mathfrak{U})$, and conversely, each $\in (\mathfrak{U})$ is isomorphic with an $\in [\mathfrak{U}]$.

On this universal-algebra level the theory gains in depth for the special case of a functionally complete (finite) kernel. Both F_p and F_{p^k} above are kernels of this character.

The unifying value of this theory is illustrated by remarking that it is identified with the theory of Post Algebras ([14]) when the kernel is taken as the (again functionally complete) n-element "min, $x+1$" f-algebra, P_n.

Criteria for functional completeness are determined (§ 16–18) and various interesting classes of complete kernels of order n are suggested, including such whose structure is more closely related to fields than is the Post kernel, P_n.

Finally for a functionally complete kernel the class $[\mathfrak{U}]$ and with it the class $(\mathfrak{U})$, referred to above, will be shown to be completely characterized by the identities satisfied by its kernel, $\mathfrak{U}$, (§ 19).

2. Some preliminaries. Let $\mathfrak{U}=(U, o, \ldots)$ be a universal algebra, where $o, \ldots$ are the *primitive operations*, in the class U. By a *U-function* $f=f(\xi, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ we mean simply a function from the set U^k to the set U. A *strict $\mathfrak{U}$-function* is a U-function composed from one or more indeterminates $\xi, \ldots$ over the set U, in terms of the primitive operations of $\mathfrak{U}$; furthermore the identity function $i(\xi)=\xi$ is admitted as a strict $\mathfrak{U}$-function. A U-function which is either a strict $\mathfrak{U}$-function or which results from such by replacing any of its arguments by constants (= fixed $\in U$) is called simply a *$\mathfrak{U}$-function*. In particular each constant, $\alpha \in U$, is thus a $\mathfrak{U}$-function.

A *$\mathfrak{U}$-permutation* $p(\xi)$ is a $\mathfrak{U}$-function which is a permutation ($=1-1$ self-mapping) of the set U. A *$\mathfrak{U}$-identity* is an identity $f(\xi, \ldots)=g(\xi, \ldots)$ between $\mathfrak{U}$-functions f and g; the identity is called *strict* if both f and g are strict functions.

$\mathfrak{U}$ is *finite*, of *order n*, if U is a class of n elements. $\mathfrak{U}$ is *(functionally) complete* if it is finite, and if every U-function may be expressed as a $\mathfrak{U}$-function; if every U-function may be expressed as a strict $\mathfrak{U}$-function, $\mathfrak{U}$ is called *strictly* complete.

Binary- and f-algebras, frames, etc. An algebra $\mathfrak{U}=(U, \times, o, \ldots)$ is called *binary* if its primitive operations include a binary operation, $\times$ (= "product" or "connex") for which a $0 \in U$ (= "zero" or "null") and a $1 \in U$ (= "identity") exist satisfying

$$0 \times \xi = \xi \times 0 = 0, \qquad 1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi \quad (\xi \in U).$$

It is noted that the product, $\times$, need in general be neither associative nor commutative.

A binary algebra $\mathfrak{U}=(U, \times, ^\wedge, ^\vee)$ whose primitive operations consist of $\times$ together with a $0 \leftrightarrow 1$ permutation, $^\wedge$, of U and its inverse, $^\vee$, we call a *(simple) frame*,—also a *(simple) logical algebra*, or *logic*. We write

$$\wedge(\xi)=\xi^\wedge, \qquad \vee(\xi)=\xi^\vee$$

and by definition,

$$0^{\wedge} = 1, \qquad 1^{\wedge} = 0; \qquad 0^{\vee} = 1, \qquad 1^{\vee} = 0; \qquad \xi^{\wedge\vee} = \xi^{\vee\wedge} = \xi .$$

We call $^{\wedge}$ the *complement* of the frame, or logic, and $^{\vee}$ the inverse complement.

A binary algebra $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ is called a *frame algebra*, or simply an *f-algebra* if at least one $0 \leftrightarrow 1$ permutation, $^{\wedge}$, of the set U is expressible as a $\mathfrak{U}$-permutation, and if the inverse, $^{\vee}$, of $^{\wedge}$ is also so expressible. We then call the algebra $\mathcal{U} = (U, \times, ^{\wedge}, ^{\vee})$ a *frame of* $\mathfrak{U}$,—or the $^{\wedge}$-frame of $\mathfrak{U}$, also the *$^{\wedge}$-logic* of $\mathfrak{U}$. Examples are widespread. To begin with, all Boolean rings, p-rings and p^k-rings are f-algebras. Quite generally, any ring with unit is an f-algebra, with $^{\wedge}$ given for example by: $\xi^{\wedge} = 1 - \xi$. Again, any complemented lattice, also all Post-algebras are f-algebras. Further, any functionally complete binary algebra (see § 16–18 for criteria and examples) is an f-algebra. Finally we remark, if a binary algebra is not an f-algebra it may of course be converted to one by augmenting its primitive operations by $^{\wedge}$, $^{\vee}$—an arbitrary $0 \leftrightarrow 1$ U-permutation and its inverse.

If $\mathfrak{U}$ is an f-algebra we shall use the term "subalgebra" of $\mathfrak{U}$ to mean: subalgebra containing the 0 of $\mathfrak{U}$. If $\mathcal{U}$ is a frame of $\mathfrak{U}$ then a subalgebra of $\mathcal{U}$ (i.e., a subalgebra containing the 0 of $\mathfrak{U}$) is called a *subframe* of $\mathfrak{U}$, or of $\mathcal{U}$.

If $\mathfrak{U}$ is a finite binary algebra which possesses a $0 \leftrightarrow 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $^{\wedge}$, then its inverse, $^{\vee}$, is necessarily a $\mathfrak{U}$-permutation and $\mathfrak{U}$ is therefore an f-algebra.

Transforms; $^{\wedge}$-join. Let U be a class, $f(\xi, \xi_2, \ldots)$ a U-function and $p(\xi)$ a permutation of the set U, with inverse written $p^{-}(\xi)$. Then the function f_p defined by

$$f_p(\xi, \xi_2, \ldots) = p^{-}\{f(p(\xi), p(\xi_2), \ldots)\}$$

is called the *p-transform*[1]) of f. Via the $1-1$ correspondence $\xi \to p(\xi)$ the functions (as mappings) are isomorphic,

$$f_p(\xi, \ldots) \cong f(\xi, \ldots) .$$

We are here particularly concerned with a frame $\mathcal{U} = (U, \times, ^{\wedge}, ^{\vee})$ of an f-algebra $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$, and with $p(\xi)$ chosen as the complement, $^{\wedge}$. The $^{\wedge}$-transform of each $\mathfrak{U}$-function is then an (isomorphic) $\mathfrak{U}$-function, and the $^{\wedge}$-transform of each $\mathcal{U}$-function (= *frame*-function) is again a frame function. In particular, $\times_{\wedge}$, the $^{\wedge}$-transform of the product, $\times$, of the algebra $\mathfrak{U}$ is given by

$$\xi \times_{\wedge} \eta = (\xi^{\wedge} \times \eta^{\wedge})^{\vee} = (\xi^{\wedge} \eta^{\wedge})^{\vee} .$$

We call $\times_{\wedge}$ the *join* (or *$^{\wedge}$-join*) operation of $\mathfrak{U}$, or of $\mathcal{U}$[2]).

---

[1]) See [8]. As there noted, f_p is the "same" function as f, expressed however in the p "coordinate system".

[2]) The terminology stems from the special case where $\mathfrak{U} = (U, \times, +)$ is a Boolean ring, which is an f-algebra with the frame (= Boolean algebra corresponding to the ring $\mathfrak{U}$) $\mathcal{U} = (\mathfrak{U}, \times, ^{\wedge}, ^{\vee})$, where

$$\xi^{\wedge} = \xi^{\vee} = 1 + \xi .$$

In this case $\times_{\wedge}$ reduces to the Boolean union,

$$\xi \times_{\wedge} \eta = \xi + \eta + \xi\eta = \xi + \eta - \xi\eta = \xi \oplus \eta = \text{union}.$$

A. Synthesis: Boolean Extension of an f-algebra.

3. J-extension of a set. Let $\mathfrak{U}=(U, \times, o, \ldots)$ be an f-algebra[3]) and let J be a given Boolean algebra. We call $\mathfrak{U}$ the *kernel* and J the *core* of a specific over f-algebra $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_{[J]}$ which we shall synthesize in a manner reminiscent of an orthodox hypercomplex construction. The class $[\mathfrak{A}]$ of all such algebras $\mathfrak{A}$—with fixed kernel and variable core—is the class referred to in the introduction. That is, in each $\mathfrak{A}\in[\mathfrak{A}]$ we shall establish the existence of a certain normal decomposition. In § 10 we shall establish an isomorphic identification of $[\mathfrak{A}]$ with a certain class of subdirect sums of $\mathfrak{U}$.

Condition on J. Throughout the paper we shall automatically assume: if the kernel $\mathfrak{U}$ is a finite algebra, J may be chosen as an entirely arbitrary Boolean algebra; in particular it may be of arbitrary cardinality, and need not be complete, nor even atomistic, etc. If $\mathfrak{U}$ is an infinite algebra we restrict J to being an arbitrary *complete* Boolean algebra.

Notation. In the core $(J, \times, *)$, in which $\times, *$ denote Boolean-intersection and -complement, and in which the null and universe are denoted by $0, 1$, possible ambiguity in the meanings of $\times, 0, 1$ is usually resolved by the convention: small Greek letters α, β, ξ, η, etc. denote $\in \mathfrak{U}$ (= kernel); small Roman letters a, b, x, y etc. denote elements of J; bold face $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ etc. denote $\in \mathfrak{A}$, to be defined presently. Thus, in the expression $\alpha\times\beta\,(=\alpha\,\beta)=0$, both $\times$ and 0 refer to $\mathfrak{U}$, while in $a\times b\,(=a\,b)=1$ both $\times$ and 1 refer to J. This present ambiguous use of $\times, 0, 1$ anticipates an eventual single-meaninged interpretation, in which both kernel and core will be identified as particular subsystems of $\mathfrak{A}$.

We consider the set

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_{[J]}=\{\ldots, \boldsymbol{\alpha}, \ldots\}, \tag{3.1}$$

which depends only on the set U and the Boolean algebra J, and, in particular, is independent of the primitive operations of $\mathfrak{U}$. The elements

$$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=[\ldots, a_\mu, \ldots]$$

are the J-*partition vectors* over U: to each $\mu\in U$ is assigned an $a_\mu\in J$, such that the a_μ are pairwise disjoint and cover J,

$$\begin{cases} a_\mu a_\nu = 0 & (\mu \neq \nu) \\ \overset{\times_*}{\sum\limits_{\mu\in U}} a_\mu = 1 & (\mu, \nu \in U). \end{cases} \tag{3.2}$$

Here $\times_*$ is the Boolean union operation of J,

$$a\times_* b=(a^* b^*)^*, \qquad (a, b\in J), \tag{3.3}$$

[3]) The f-algebra nature of $\mathfrak{U}$ is not used until § 5. In this and the following section $\mathfrak{U}$ may be an arbitrary universal algebra.

and $\overset{\times *}{\sum_{\mu \in U}}$ denotes the union of the assigned a_μ. The a_μ are called the J- or *core-components* of $\mathfrak{a}$, and in connection therewith we shall use square brackets,

$$[\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}; \qquad [\mathfrak{a}]_\mu = a_\mu. \tag{3.4}$$

Further, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *(equality)* denotes: $[\mathfrak{a}]_\mu = [\mathfrak{b}]_\mu$, $(\mu \in U)$.

Identification of U in $\boldsymbol{U}$. By U', the *regular* subset of $\boldsymbol{U}$, we mean the set of all $\in \boldsymbol{U}$ in which some core-component is 1; from this it follows that all other components are 0. We have

$$U' = \{\ldots, \mathfrak{1}_\mu, \ldots\}, \quad \mathfrak{1}_\mu = [\ldots, 0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots], \ (\mu^{\text{th}} \text{ component} = 1), \tag{3.5}$$

and we shall henceforth automatically *identify* the kernel set U with this regular subset,

$$U = U': \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{1}_\alpha, \qquad U \subseteqq \boldsymbol{U}, \tag{3.6}$$

thus in part justifying the "extension" terminology for $\boldsymbol{U}$: U is a specific subset of $\boldsymbol{U}$, or $\boldsymbol{U}$ an overset of U.

For the finite case we have the readily verified (see [*10*])

Theorem 1. *If $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]}$ is finite (that is if both the kernel $\mathfrak{U}$ and the core J are finite), the order of $\boldsymbol{U}$ is n^k, where n is the order of $\mathfrak{U}$ and k is the number of atoms in J.*

4. The J-extension of operations. Let now $q(\xi, \eta, \ldots)$ be any $\mathfrak{U}$-function, or even any U-function. By the *extension to* $\boldsymbol{U}$, or the *J-extension* of $q(\xi, \eta, \ldots)$ we mean the $\boldsymbol{U}$-function $q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)$ defined by:

$$q_\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots) = [q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)]_\mu = \overset{\times *}{\sum_{g(\alpha, \beta, \ldots) = \mu}} (x_\alpha y_\beta \ldots), \tag{4.1}$$

where

$$\mathfrak{x} = [\ldots, x_\mu, \ldots], \quad \mathfrak{y} = [\ldots, y_\mu, \ldots], \ldots.$$

Here $\overset{\times *}{\sum}$ denotes the union of all those terms $(x_\alpha y_\beta \ldots)$ for which $g(\alpha, \beta, \ldots) = \mu$; if for some particular μ no such $\alpha, \beta, \ldots$ exist, then for this μ, $q_\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)$ is defined $= 0$. It is easily verified from (4.1) that

$$\begin{cases} q_\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots) \times q_\nu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots) = 0 \quad (\mu \neq \nu) \\ \overset{\times *}{\sum_{\mu \in U}} q_\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots) = 1, \end{cases} \tag{4.2}$$

and hence that $q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots)$ as defined is actually $\in \boldsymbol{U}$.

The *J-extension* of an algebra $\mathfrak{U} = (U, \ldots, o, \ldots)$ is now defined as the algebra $\mathfrak{U} = (\boldsymbol{U}, \ldots, o, \ldots)$ whose class $\boldsymbol{U}$ of elements is the J-extension of the class U, and whose primitive operations are the J-extensions of the primitive operations of $\mathfrak{U}$.

The identification of U with the regular subset of $\boldsymbol{U}$ (§ 3) and the "extension" terminology is now fully justified by

Theorem 2. *If U' is the class of all regular elements of $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]}$ then $\mathfrak{U}' = (U', \ldots, o, \ldots)$ forms a subalgebra (called the regular subalgebra) of $\mathfrak{U} = (\boldsymbol{U}, \ldots, o, \ldots)$. Via the $1-1$ correspondence*

$$\alpha \leftrightarrow \mathbf{1}_\alpha \qquad (\alpha \in \mathfrak{U})$$

$\mathfrak{U}'$ is isomorphic with the kernel $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$.

Proof. We must show that: from $o(\alpha, \beta, \ldots) = \gamma$ follows $o(\mathbf{1}_\alpha, \mathbf{1}_\beta, \ldots) = \mathbf{1}_\gamma$, or, what is equivalent, that

$$o_\mu(\mathbf{1}_\alpha, \mathbf{1}_\beta, \ldots) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu = \gamma \\ 0 & \text{if } \mu \neq \gamma \end{cases}. \tag{4.3}$$

But

$$o_\mu(\mathbf{1}_\alpha, \mathbf{1}_\beta, \ldots) = \sum_{o(\sigma, \tau, \ldots) = \mu}^{\times *} ([\mathbf{1}_\alpha]_\sigma [\mathbf{1}_\beta]_\tau \ldots). \tag{4.4}$$

From the definition of the $\mathbf{1}_\alpha$, (4.4) reduces to (4.3) and the theorem is proved.

We shall hereafter *identify* $\mathfrak{U}$ with $\mathfrak{U}'$, and shall speak of the *kernel* $\mathfrak{U}$ of $\mathfrak{U}$:

$$\alpha = \mathbf{1}_\alpha, \qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}' = \text{kernel} = \text{regular subalgebra of } \mathfrak{U}, \mathfrak{U} < \mathfrak{U}. \tag{4.5}$$

Each U-function $f(\xi, \eta, \ldots)$ extends, by (4.1) to a unique $\boldsymbol{U}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$,

$$f(\xi, \eta, \ldots) \to f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots). \tag{4.6}$$

To distinguish the latter from general $\boldsymbol{U}$-functions let us call $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ *regular*, that is: a $\boldsymbol{U}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ is regular if and only if it is the J-extension (4.1) of some U-function $f(\xi, \eta, \ldots)$; such $f(\xi, \eta, \ldots)$ we then call an *antecedent* of $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$.

Lemma 3. *A regular $\boldsymbol{U}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ has precisely one antecedent $f(\xi, \eta, \ldots)$; the latter is identical with the "regular part" of $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$, i.e., the function resulting from the restriction of $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$ to the kernel of $\boldsymbol{U}$.*

Proof. Let $f(\xi, \eta, \ldots)$ and $f'(\xi, \eta, \ldots)$ be antecedents of $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$. Then

$$f_\mu(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) = \sum_{f(\alpha, \beta, \ldots) = \mu}^{\times *} [\boldsymbol{\xi}]_\alpha [\boldsymbol{\eta}]_\beta \ldots = \sum_{f'(\alpha, \beta, \ldots) = \mu}^{\times *} [\boldsymbol{\xi}]_\alpha [\boldsymbol{\eta}]_\beta \ldots, \qquad (\mu \in U). \tag{4.7}$$

Since the $[\boldsymbol{\xi}]_\alpha$ are pairwise disjoint, with $\sum_{\alpha \in U}^{\times *} [\boldsymbol{\xi}]_\alpha = 1$, and similarly for the $[\boldsymbol{\eta}]_\alpha, \ldots$ it follows from (4.7) that $f(\alpha, \beta, \ldots) = f'(\alpha, \beta, \ldots)$ in U. That is, the antecedent is unique. The rest of the theorem follows on inserting regular arguments in (4.7), as in the proof of Theorem 2.

There is thus a $1-1$ correspondence between the U- and the regular $\boldsymbol{U}$-functions.

Let $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, $g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi})$ be regular $\boldsymbol{U}$-functions. Their regular parts (antecedents) are $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta, \varphi)$. Consider the composition $f(\boldsymbol{\xi}, g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\tau}))$. That

this is a regular $\boldsymbol{U}$-function, with antecedent $f(\xi, g(\eta, \varphi, \tau))$ is seen by repeated used of (4.1); we have

$$[f(\boldsymbol{\xi}, g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\tau}))]_\mu = \overset{\times_*}{\sum_{f(\alpha, g(\beta, \gamma, \sigma)) = \mu}} [\boldsymbol{\xi}]_\alpha [\boldsymbol{\eta}]_\beta [\boldsymbol{\varphi}]_\gamma [\boldsymbol{\tau}]_\sigma, \qquad (\mu \in U).$$

Again $f(\boldsymbol{\xi}, g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}))$ is a regular $\boldsymbol{U}$-function with antecedent $f(\xi, g(\xi, \eta, \varphi))$; by (4.1)

$$[f(\boldsymbol{\xi}, g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}))]_\mu = \overset{\times_*}{\sum_{f(\alpha, g(\alpha, \beta, \gamma)) = \mu}} [\boldsymbol{\xi}]_\alpha [\boldsymbol{\eta}]_\beta [\boldsymbol{\varphi}]_\gamma, \qquad (\mu \in U).$$

In a similar fashion one proves, quite generally,

Lemma 4. *The* $1-1$ *correspondence between* U- *and regular* $\boldsymbol{U}$-*functions is preserved under compositions. In particular, any composition of regular* $\boldsymbol{U}$-*functions is a regular* $\boldsymbol{U}$-*function.*

A strict $\mathfrak{U}$-function is some composition of the primitive $\mathfrak{U}$-functions, and the latter are the extensions to U of the primitive $\mathfrak{U}$-functions. Lemma 4 then has the immediate corollary

Theorem 5. *The class of strict* $\mathfrak{U}$-*functions and the class of strict* $\mathbf{U}$-*functions are in* $1-1$ *correspondence: if* $h(\xi, \eta, \ldots)$ *is a strict* $\mathfrak{U}$-*function its* J-*extension* $h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ *is a strict* $\mathbf{U}$-*function; conversely, if* $h(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$ *is a strict* $\mathbf{U}$-*function it is a* $\boldsymbol{U}$-*function whose antecedent (= regular part) is a strict* $\mathfrak{U}$-*function.*

For general (i.e., not necessarily strict) $\mathfrak{U}$ and $\mathbf{U}$ functions one then readily obtains the further result,

Theorem 6. *There is a* $1-1$ *correspondence between the class of all* $\mathfrak{U}$ *functions and the subclass of all* $\mathbf{U}$-*functions* (i) *whose constants (if any,—see § 2) are elements of the kernel* $\mathfrak{U}$ *of* $\mathbf{U}$: *if* $f(\xi, \ldots)$ *is a* $\mathfrak{U}$-*function, its* J-*extension is a* $\mathbf{U}$-*function (with the property (i)); conversely if* $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ *is a* $\mathbf{U}$-*function with the property* (i) *it is the* J-*extension of a* $\mathfrak{U}$-*function.*

5. Imbedding of J in $\mathbf{U}$. We have already identified the kernel $\mathfrak{U}$ with the regular subalgebra of its J extension, $\mathbf{U}$, where the kernel may be taken as an arbitrary universal algebra. We now assume the kernel to be an f-algebra. In this case we shall establish a similar isomorphic identification of the ground Boolean algebra or core J,—not however as a sub*algebra*, but as a specific sub*frame* of $\mathbf{U}$ (see § 2).

Let then $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ be an f-algebra, and let $\mathcal{U} = (U, \times, \wedge, \vee)$ be an arbitrary but fixed frame of $\mathfrak{U}$, which we also refer to as *the* frame of $\mathfrak{U}$. Let $J = (J, \times, *)$ be a given Boolean algebra (= core) and let $\mathbf{U} = (\boldsymbol{U}, \times, o, \ldots)$ and $\boldsymbol{\mathcal{U}} = (U, \times, \wedge, \vee)$ be the J-extensions of $\mathfrak{U}$ and U respectively.

By (4.1) we have, for $\boldsymbol{\xi} = [\ldots, x_\mu, \ldots]$, $\boldsymbol{\eta} = [\ldots, y_\mu, \ldots]$, $\ldots$; $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots \in \boldsymbol{U}$,

$$(5.1) \qquad \begin{cases} [\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}]_\mu = \overset{\times_*}{\sum_{\alpha\beta = \mu}} x_\alpha y_\beta \\ [\boldsymbol{\xi}^\wedge]_\mu = \overset{\times_*}{\sum_{\alpha^\wedge = \mu}} x_\alpha = x_{\mu^\vee} \\ [\boldsymbol{\xi}^\vee]_\mu = \overset{\times_*}{\sum_{\alpha^\vee = \mu}} x_\alpha = x_{\mu^\wedge}. \end{cases}$$

Theorem 7. $\mathfrak{U}$ *is an f-algebra and* $\mathfrak{U}$ *is a frame of* $\mathfrak{U}$.

Proof. That the extended operations $^\wedge, ^\vee$ are $\boldsymbol{U}$-permutations follows from (5.1). Further $0^\wedge = 1$, $1^\wedge = 0$, since this is so in $\mathcal{U}$ and $\mathfrak{U}$ is an extension of $\mathcal{U}$. Finally $^\wedge$ and $^\vee$ may be expressed as $\mathfrak{U}$-functions; this follows from Theorem 6, since $^\wedge$ and $^\vee$ are expressible as $\mathfrak{U}$-functions. This proves the theorem. We shall call $\mathfrak{U}$ *the* frame of $\mathfrak{U}$.

A subframe $\boldsymbol{T}$ of $\mathfrak{U}$, or of $\mathfrak{U}$, has already been defined as a subalgebra of $\mathfrak{U}$ which contains the element 0; it will then also contain the element $1 = 0^\wedge$ and therefore $\Theta = \{0, 1\} =$ 2-element subframe,

$$\Theta \leqq \boldsymbol{T} \leqq \mathfrak{U}. \tag{5.2}$$

In writing the elements of $\boldsymbol{U}$ let us agree to reserve the first two places for the 0 and 1 components,

$$\alpha = [\alpha] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots].$$

Let J' denote the class of all elements of $\boldsymbol{U}$ of the form

$$[a^*, a, 0, \ldots, 0, \ldots]. \tag{5.3}$$

Theorem 8. $(J', \times, ^\wedge, ^\vee)$ *is a subframe of* $\mathfrak{U}$. *It is a Boolean algebra with* $\times$ *as Boolean intersection and* $^\wedge = ^\vee$ *as Boolean complement. Via the* $1-1$ *correspondence*

$$J \leftrightarrow J', \quad a \leftrightarrow [a^*, a, 0, \ldots, 0, \ldots], \tag{5.4}$$

the Boolean algebra J' *is isomorphic with the ground algebra or core,* J,

$$J \cong J'.$$

Proof. From (5.1) one computes

$$\begin{cases} [a^*, a, 0, \ldots] \times [b^*, b, 0, \ldots] = [(a\,b)^*, a\,b, 0, \ldots] \\ [a^*, a, 0, \ldots]^\wedge = [a^*, a, 0, \ldots]^\vee = [a, a^*, 0, \ldots], \end{cases} \tag{5.5}$$

from which the theorem follows. We shall hereafter *identify* J with J' and shall refer to the *core of* $\mathfrak{U}$, or of $\mathfrak{U}$,

$$J = J', \qquad a = [a^*, a, o, \ldots], \qquad J \leqq \mathfrak{U}. \tag{5.6}$$

For core elements, then: $a^\wedge = a^\vee = a^*$, $a^{\wedge\wedge} = a^{\vee\vee} =$ etc. $= a$, $(a \in J)$. Furthermore with the identification of J as the core of $\mathfrak{U}$, our previous Boolean sum $\sum^{\times^*}$ (union) may now be expressed as an operation in $\mathfrak{U}$,

$$\sum^{\times^*} = \sum^{\times_\wedge}, \tag{5.7}$$

where $\times_\wedge$ is the $^\wedge$-transform of $\times$ (§ 2),

$$\xi \times_\wedge \eta = (\xi^\wedge \times \eta^\wedge)^\vee, \qquad (\xi, \eta \in \mathfrak{U}). \tag{5.8}$$

6. Fundamental identities; normal expansion theorem. The core elements of $\mathfrak{U}$ commute and associate,

$$\left\{\begin{array}{l} a\,b = b\,a \\ a(b\,c) = (a\,b)\,c = a\,b\,c \end{array}\right. \qquad (a, b, c \in J). \tag{6.1}$$

We list several additional basic identities as Theorem 9. These may all be directly verified by use of (5.1)–(5.8); they are however more readily proved as consequences of the subdirect sum representation for $\mathfrak{U}$ to be established in § 10–15.

Theorem 9. *Let $\mathfrak{U}$ be the J-extension of the f-algebra $\mathfrak{U}$, and identify J and $\mathfrak{U}$ with the core and kernel of $\mathfrak{U}$. Then*

For $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{U}$; $a, b \in J$,

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\xi}\,a = a\,\boldsymbol{\xi} \\ (\boldsymbol{\xi}\,a)\,b = \boldsymbol{\xi}(a\,b) = \boldsymbol{\xi}\,a\,b \\ (\boldsymbol{\xi}\,\boldsymbol{\eta})\,a = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}\,a) = \boldsymbol{\xi}\,\boldsymbol{\eta}\,a. \end{array}\right. \tag{6.2}$$

For $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi} \in \mathfrak{U}$; a, b, c *pairwise disjoint* $\in J$,

$$\left\{\begin{array}{l} a\,\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\,\boldsymbol{\eta} = b\,\boldsymbol{\eta} \times_{\wedge} a\,\boldsymbol{\xi} \\ (a\,\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\,\boldsymbol{\eta}) \times_{\wedge} c\,\boldsymbol{\varphi} = a\,\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} (b\,\boldsymbol{\eta} \times_{\wedge} c\,\boldsymbol{\varphi}) = a\,\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\,\boldsymbol{\eta} \times_{\wedge} c\,\boldsymbol{\varphi}. \end{array}\right. \tag{6.3}$$

For $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{U}$; a, b *disjoint* $\in J$,

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(a\,\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\,\boldsymbol{\eta}) = a\,\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\,\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\eta} \\ (a\,\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} b\,\boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{\sigma} = a\,\boldsymbol{\xi}\,\boldsymbol{\sigma} \times_{\wedge} b\,\boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{\sigma}. \end{array}\right. \tag{6.4}$$

Remark. In the important special case, as in a ring, where the core f-algebra $\mathfrak{U}$ is associative, $\alpha(\beta\,\gamma) = (\alpha\,\beta)\,\gamma$ and/or commutative $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$, $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{U})$ it follows easily from (5.1) that the same holds in $\mathfrak{U}$: $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\gamma}$ and/or $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathfrak{U}$. Hence, in this special case, the proof of (6.2) is immediate. So also is that of (6.3), since $\times_{\wedge}$ is a transform of the operation $\times$, and therefore an isomorphic mapping. Hence the associativity and/or commutativity of $\times$ carries with it that of $\times_{\wedge}$,

$$\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} (\boldsymbol{\eta} \times_{\wedge} \boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} \boldsymbol{\eta}) \times_{\wedge} \boldsymbol{\varphi} \quad \text{and/or} \quad \boldsymbol{\xi} \times_{\wedge} \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} \times_{\wedge} \boldsymbol{\xi}.$$

7. On general $\times_{\wedge}$-sums. The (limited) $\times_{\wedge}$-associativity and -distributivity properties (6.3) and (6.4) easily extend to finite $\times_{\wedge}$-sums,—where $a, b, c,$— are pairwise disjoint. The general (not necessarily finite) versions of these may be obtained in the following manner.

Let

$$\boldsymbol{\xi} = [\ldots, x_{\mu}, \ldots], \qquad \boldsymbol{\eta} = [\ldots, y_{\mu}, \ldots], \ldots$$

be $\in \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]}$. We define $\xi \sim \eta$ (read: ξ is *compatible* with η, and $\xi < \eta$ (read: ξ is *contained* in η) by:

(7.1) $\xi \sim \eta$ if and only if $x_\mu y_\nu = 0 \quad (\mu, \nu \neq 0;\ \mu, \nu \in U)$.

(7.2) $\xi < \eta$ if and only if $x_\mu < y_\mu \quad (\mu \neq 0;\ \mu \in U)$.

From this one readily has that $<$ partially orders $\boldsymbol{U}$.

Theorem 10. *Let $E = \{\ldots, \xi^{(i)}, \ldots\}$ be a class of pairwise compatible elements of $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]}$. Let ξ be defined by the J-partition*

$$(7.3) \qquad \xi: \begin{cases} [\xi]_\mu = \overset{\times\wedge}{\sum_{\xi^{(i)} \in E}} [\xi^{(i)}]_\mu, \\ [\xi]_0 = \left(\overset{\times\wedge}{\sum_{\mu \in U,\ \mu \neq 0}} [\xi]_\mu \right)^\wedge \end{cases} \qquad (\mu \neq 0).$$

If (i) *E is a finite set, or if* (ii) *E is a set of arbitrary cardinality and J is complete, $\xi \in \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{[J]}$ and is the least upper bound of the $\xi^{(i)} \in E$: $\xi^{(i)} < \xi$, and if $\xi' \in U$ and if $\xi^{(i)} < \xi'$ for all $\xi^{(i)} \in E$, then $\xi < \xi'$. In the case* (i) *ξ is also given by*

$$(7.4) \qquad \xi = \overset{\times\wedge}{\sum_{\xi^{(i)} \in E}} \xi^{(i)},$$

while in case (ii) *the right of* (7.4) *is defined as ξ (given by* (7.3)*). In either case, for any $\sigma \in \boldsymbol{U}$, $\sigma E = \{\ldots, \sigma\xi^{(i)}, \ldots\}$ consists of pairwise compatible elements of $\boldsymbol{U}$ and the general distributive property holds,*

$$(7.5) \qquad \sigma\xi = \overset{\times\wedge}{\sum} \sigma\xi^{(i)}, \quad \xi\sigma = \overset{\times\wedge}{\sum} \xi^{(i)}\sigma.$$

We shall omit the proof, which is entirely straightforward.

8. The normal decomposition. We may now formulate

Theorem 11 (Normal decomposition theorem). *Let $\mathfrak{U}$ be the J-extension of the f-algebra $\mathfrak{U}$, let $\xi, \eta, \ldots$ be $\in \mathfrak{U}$, with (idempotent) components $[\xi]_\mu = x_\mu$, etc. Then each $\mathfrak{U}$-function $f(\xi, \eta, \ldots)$ possesses an expansion (= "normal decomposition"),*

$$(8.2) \qquad f(\xi, \eta, \ldots) = \overset{\times\wedge}{\sum_{\mu, \nu, \ldots \in \mathfrak{U}}} f(\mu, \nu, \ldots)\, x_\mu y_\nu \ldots.$$

Proof. Note that the terms on the right of (8.2) are pairwise disjoint and therefore compatible. In case the kernel $\mathfrak{U}$ is infinite we have that J is complete (§ 3), and therefore the right of (8.2) always defines an element of $\mathfrak{U}$, by theorem 10.

We first show that (8.2) holds for the identity function, i.e., that

$$(8.3) \qquad \xi = \overset{\times\wedge}{\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}} \mu\, x_\mu.$$

Now by (3.6), (5.6) and (5.1), for $\alpha \in \mathfrak{U}$ one computes

$$\alpha[\xi]_\alpha = \alpha\, x_\alpha = [x_\alpha^*, \ldots, 0, \ldots, x_\alpha, \ldots, 0, \ldots], \quad (x_\alpha \text{ in } \alpha^{\text{th}} \text{ place}). \tag{8.4}$$

Similarly for $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ all different $\in \mathfrak{U}$, $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$ are pairwise disjoint, and by (5.1) and (5.8) one computes

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\, x_\alpha \times_\wedge \beta\, x_\beta \times_\wedge \gamma\, x_\gamma \times_\wedge \cdots \\ &= [x_\alpha^*\, x_\beta^*\, x_\gamma^* \ldots, \ldots, 0, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_\beta, \ldots, x_\gamma, \ldots, 0, \ldots] \\ &\qquad\qquad (x_\alpha \text{ in } \alpha^{\text{th}} \text{ place}, \ x_\beta \text{ in } \beta^{\text{th}}, \ldots). \end{aligned}\right. \tag{8.5}$$

As μ runs through the kernel $\mathfrak{U}$ the identity (8.3) follows readily from (8.5)[4].

We now show that (8.2) holds for strict $\mathfrak{U}$-functions. Let $h(\xi, \eta, \ldots)$ be a strict $\mathfrak{U}$-function. By use of theorem 5 and (4.1) we have

$$[h(\xi, \eta, \ldots)]_\sigma = \sum_{h(\mu, \nu, \ldots) = \sigma}^{\times_\wedge} [\xi]_\mu\, [\eta]_\nu \cdots . \tag{8.6}$$

Again, by (8.3),

$$h(\xi, \eta, \ldots) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} \sigma\, [h(\xi, \eta, \ldots)]_\sigma . \tag{8.7}$$

Combining (8.6) and (8.7),

$$h(\xi, \eta, \ldots) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} \sigma \Big(\sum_{h(\mu, \nu, \ldots) = \sigma} [\xi]_\mu\, [\eta]_\nu \cdots \Big) = \sum_{\mu, \nu, \ldots \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} h(\mu, \nu, \ldots)\, [\xi]_\mu\, [\eta]_\nu \cdots . \tag{8.8}$$

This is precisely the expansion (8.2) for the strict $\mathfrak{U}$-function $h(\xi, \eta, \ldots)$.

There remains to establish (8.2) for non-strict $\mathfrak{U}$-functions. If $f(\xi, \eta, \ldots)$ is such, then (see § 2) it is obtained from a suitable strict $\mathfrak{U}$-function h by the substitution of appropiate constants $\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}$,

$$f(\xi, \eta, \ldots) = h(\xi, \eta, \ldots, \alpha, \beta, \ldots). \tag{8.9}$$

Consider the typical case

$$f(\xi, \eta) = h(\xi, \eta, \alpha), \tag{8.10}$$

where $h(\xi, \eta, \alpha)$ is strict. We shall show that $f(\xi, \eta)$ satisfies (8.2). The proof of the general situation (8.9) is exactly parallel.

We must show that

$$f(\xi, \eta) = \sum_{\mu, \nu, \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} f(\mu, \nu)\, [\xi]_\mu\, [\eta]_\nu . \tag{8.11}$$

Since the strict $\mathfrak{U}$-function h has been shown to satisfy (8.2), by (8.10) we then have

$$f(\mu, \nu) = h(\mu, \nu, \alpha) = \sum_{\sigma, \tau, \lambda \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} h(\sigma, \tau, \lambda)\, [\mu]_\sigma\, [\nu]_\tau\, [\alpha]_\lambda . \tag{8.12}$$

[4] The proof also follows readily from the fundamental isomorphism, theorem 17.

Now $[\mu]_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma = \mu \\ 0 & \text{if } \sigma \neq \mu \end{cases}$, and similarly for $[\nu]_\sigma \dots$. Hence (8.12) reduces to

$$f(\mu, \nu) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} h(\mu, \nu, \lambda)\, [\alpha]_\lambda. \tag{8.13}$$

By (8.11), (8.9) and (8.13) we are required thus to show that

$$h(\xi, \eta, \alpha) = \sum_{\mu, \nu, \lambda \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} h(\mu, \nu, \lambda)\, [\xi]_\mu\, [\eta]_\nu\, [\alpha]_\lambda. \tag{8.14}$$

This however is true, since it is the normal expansion of the (strict) $\mathfrak{U}$-function, h. Hence (8.11)—and in like manner the normal expansion of any $\mathfrak{U}$-function—is established. The proof of theorem 11 is now complete.

9. Abstract formulation. In terms of properties already established and largely selected from theorems 9–11, we shall now give an abstract characterization of the concept: Boolean extension of an f-algebra. We shall do this only for the case where the kernel is finite; for an infinite kernel the abstract formulation of the "convergence" of such $\times_\wedge$-sums as in (3°) and (5°) below is somewhat involved, and will not here be attempted.

Theorem 12. *Let $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{V}$ be f-algebras of which the latter is finite. For $\mathfrak{B}$ to be (isomorphic with) a Boolean extension of $\mathfrak{V}$ it is necessary and sufficient that $\mathfrak{B}$ possess a subalgebra isomorphic with (and here again denoted by) $\mathfrak{V}$, and a subframe J, such that*

(1°) *J is a Boolean algebra.*

(2°) *$\mathfrak{B}$, J satisfy* (6.2), (6.3) *and* (6.4) *of theorem* 9—*with $\mathfrak{U}$ replaced by $\mathfrak{B}$.*

(3°) *Each $\xi \in \mathfrak{B}$ may be expressed in the form*

$$\xi = \sum_{\mu \in \mathfrak{B}}^{\times_\wedge} \mu\, x_\mu,$$

in which the x_μ satisfy

$$x_\mu \in J, \qquad x_\mu x_\nu = 0 \ (\mu \neq \nu), \qquad \sum^{\times_\wedge} x_\mu = 1.$$

(4°) *For each $\xi \in \mathfrak{B}$, the x_μ determined by* (3°) *are unique.*

(5°) *For each primitive operation o of the algebra $\mathfrak{B}$*

$$o(\xi, \eta, \dots) = \sum_{\mu, \nu, \dots \in \mathfrak{B}}^{\times_\wedge} o(\mu, \nu, \dots)\, x_\mu\, y_\nu \dots,$$

where the x_μ, y_ν, ... are determined from ξ, η, ... by (3°) *and* (4°).

Proof. The necessity of the conditions follows directly from theorems 2, 8, 9 and 11. To prove sufficiency, choose $\mathfrak{V}$ as kernel and J as core and construct $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'_{[J]}$, the J-extension of $\mathfrak{V}$. Establish the correspondence

$$\mathfrak{B}' \to \mathfrak{B}: \quad \xi' = [\dots, x_\mu, \dots] \to \xi = \sum_{\mu \in \mathfrak{B}}^{\times_\wedge} \mu\, x_\mu. \tag{9.1}$$

By virtue of (4°) this correspondence is $1-1$, $\mathfrak{B}' \leftrightarrow \mathfrak{B}$. Let $\xi' \to \xi$, $\eta' \to \eta$, ... be in correspondence under (9.1), and let o be any primitive operation of the algebra $\mathfrak{B}$. We have

$$(9.2)\quad \begin{cases} o(\xi, \eta, \ldots) = \in \mathfrak{B} = \overset{\times\wedge}{\sum}_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{B}} o(\alpha, \beta, \ldots) x_\alpha y_\beta \cdots \\ o(\xi', \eta', \ldots) = \in \mathfrak{B}', \quad \text{with} \quad [o(\xi', \eta', \ldots)]_\mu = \overset{\times\wedge}{\sum}_{o(\alpha, \beta, \ldots) = \mu} x_\alpha y_\beta \cdots . \end{cases}$$

The sufficiency part of theorem 12 will be proved if we establish that

$$(9.3)\qquad o(\xi', \eta', \ldots) \to o(\xi, \eta, \ldots), \text{ under (9.1).}$$

Now the image of $o(\xi', \eta', \ldots)$ under (9.1) is

$$\overset{\times\wedge}{\sum}_{\mu \in \mathfrak{B}} \mu [o(\xi', \eta', \ldots)]_\mu = \overset{\times\wedge}{\sum}_{\mu \in \mathfrak{B}} \mu \left(\overset{\times\wedge}{\sum}_{o(\alpha, \beta, \ldots) = \mu} (x_\alpha y_\beta \ldots) \right)$$

which, on use of condition (2°)—especially part (6.4)—may be written simply

$$\overset{\times\wedge}{\sum}_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{B}} o(\alpha, \beta, \ldots) x_\alpha y_\beta \ldots .$$

This however is seen to be $o(\xi, \eta, \ldots)$ and therefore (9.3), and with it theorem 12 is established.

Remark. In proving theorem 12 the condition (2°) was used only in the weaker form

(2°)′ (6.2)-(6.4) *of theorem* 9 *are satisfied, with* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *of theorem* 9 *replaced by* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *of* $\mathfrak{B}$.

Furthermore it is easily seen that the uniqueness condition (4°) may be replaced by simpler conditions, e.g., by

$$(4°)'\quad \begin{cases} \text{for } \mu, \nu \in \mathfrak{B};\ a \in J,\ a \neq 0: \quad \mu a = \nu a \quad \text{implies} \quad \mu = \nu. \\ \text{for } \mu \in \mathfrak{B},\ \mu \neq 0;\ a, b \in J: \quad \mu a = \mu b \quad \text{implies} \quad a = b. \end{cases}$$

B. Subdirect Sums. Relation to Boolean Extensions.

10. Normal subdirect sums. Let $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \times \ldots$ be the $\mathfrak{N}^{\text{th}}$ direct sum[5]) of the f-algebra $\mathfrak{U}$, where, in a familiar way, $\mathfrak{N}$ may be chosen of arbitrary cardinality. Let $\mathfrak{A}$ (boldface) be a subalgebra of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ and let

$$(10.1)\qquad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathfrak{N})$$

be $\in \mathfrak{A}$[6]). In anticipation of an eventual fundamental isomorphism we shall employ the same notation, $\mathfrak{A}$ and $\boldsymbol{\alpha}$, as in the Boolean extension considerations of part A. However, as above, we use round brackets (,) in connection with

[5]) A more accurate term would be "direct multiple" or "-power".

[6]) Despite the notation in (10.1), neither denumerability nor well ordering is required. See McCoy [6].

subpowers, as opposed to square brackets [,] in the Boolean extension theory. Whenever necessary to avoid ambiguity we shall moreover write

$$(10.2)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}); \quad \mathfrak{A} = (\mathfrak{A}), & \text{(subalgebra of direct sum).} \\ \boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}]; \quad \mathfrak{A} = [\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}_{[J]} & \text{(Boolean extension).} \end{cases}$$

As heretofore Greek letters (now bold face) continue to denote elements of the ground f-algebra or kernel, $\mathfrak{U}$.

For given $\mu \in \mathfrak{U}$, $P_\mu(\boldsymbol{\alpha})$, called the μ^{th} *projection* of $\boldsymbol{\alpha}$, is defined as the direct (Cartesian) vector, $\boldsymbol{\beta}$, determined by

$$P_\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\mathfrak{N}})$$
$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta_i = \mu \\ 0 & \text{if} \quad \beta_i \neq \mu \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N}).$$

In general of course $P_\mu(\boldsymbol{\alpha}) \notin \mathfrak{A}$ for $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$ = subalgebra of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$.

In preparation for a subsequent dovetailing with the condition on J (§ 3), we shall define the concept *normal subdirect sum* in two parts:

Definition. (i) If $\mathfrak{U}$ is a finite f-algebra, a subalgebra $\mathfrak{A}$ of a direct sum of $\mathfrak{U}$ is called *normal*, or, more correctly, a *normal subdirect sum* of $\mathfrak{U}$, if (1°) $\mathfrak{A}$ contains all "scalars", i.e., elements of the form $(\mu, \mu, \mu, \ldots, \mu)$, $\mu \in \mathfrak{U}$ and (2°) for $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$ and for $\mu \in \mathfrak{U}$, $P_\mu(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathfrak{A}$.

(ii) If $\mathfrak{U}$ is an infinite f-algebra a subalgebra $\mathfrak{A}$ of a direct sum of $\mathfrak{U}$ is called *normal* if and only if it is a direct sum, $\mathfrak{A} = \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$. [In this case, (ii), (1°) and (2°) above are obviously satisfied.]

While $\mathfrak{U}$ is a special case of a subdirect sum of $\mathfrak{U}$ (with $\mathfrak{N} = 1$), on account of (1°) no proper subalgebra of $\mathfrak{U}$ is a *normal* subdirect sum of $\mathfrak{U}$.

11. (Direct) imbedding of $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{A}$; (direct) extension of functions. Let $\mathfrak{A}$ be a subalgebra of a direct sum of an f-algebra, $\mathfrak{U}$. It follows from the pertinent definitions that each *strict* $\mathfrak{U}$-function $f(\xi, \eta, \ldots)$ *(directly) extends* to a $\mathfrak{A}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots)$; here, if $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\mathfrak{N}})$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\mathfrak{N}})$, ... are variables over $\mathfrak{A}$,

$$(11.1)\qquad f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots) = \text{def.} = \big(f(\xi_1, \eta_1, \ldots),\ f(\xi_2, \eta_2, \ldots), \ldots\big).$$

In case $\mathfrak{A}$ satisfies (1°) of § 10—in particular, if $\mathfrak{A}$ is normal—then the class $\mathfrak{U}_1$ of all scalars $(\mu, \mu, \ldots, \mu)$ forms a subalgebra of $\mathfrak{A}$ which is isomorphic with the kernel $\mathfrak{U}$. We call $\mathfrak{U}_1$ the *(direct) regular* subalgebra, or the *(direct) kernel* of $\mathfrak{A}$ and shall hereafter *identify* it with $\mathfrak{U}$,

$$(11.2)\qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 = \text{kernel of } \mathfrak{A},\ \mu = (\mu, \mu, \ldots, \mu),\ \mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}.$$

From this and the definition of $\mathfrak{U}$-function follows

Theorem 13. *If $\mathfrak{A}$ is a normal subdirect sum of the f-algebra, $\mathfrak{U}$, then $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}$ and the (direct) extension of each $\mathfrak{U}$-function is a $\mathfrak{A}$-function.*

For instance if $\mathfrak{A}$ is normal, the $\mathfrak{U}$-function $\beta(\xi\,\eta)$, (β = constant), extends to $\beta(\boldsymbol{\xi}\,\boldsymbol{\eta}) = (\beta, \beta, \ldots, \beta)\ (\boldsymbol{\xi}\,\boldsymbol{\eta})$.

12. The regular Boolean subalgebra. With reference to Theorem 13 it is further evident that a $0 \leftrightarrow 1$ $\mathfrak{U}$ permutation, $^\wedge$, (directly) extends to a $0 \leftrightarrow 1$ $\mathfrak{U}$-permutation. We then have

Theorem 14. *Let* $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$, $\mathbf{U} = (U, \times, o, \ldots)$ *be as in Theorem* 13, *and let* $\mathcal{U} = (U, \times, ^\wedge, ^\vee)$ *be a frame of* $\mathfrak{U}$. *Then* $\mathbf{U}$ *is an f-algebra, with* $\mathbf{U} = (\mathbf{U}, \times, ^\wedge, ^\vee)$ *as a frame.*

Let us call an arbitrary but fixed frame $\mathcal{U}$ *the* frame of $\mathfrak{U}$, and its direct extension $\mathbf{U}$ (Theorem 14) *the* frame of $\mathbf{U}$. As elsewhere, a subalgebra of $\mathbf{U}$ we call a sub*frame* of $\mathbf{U}$, or of $\mathbf{U}$.

Let now $J = J(\mathbf{U})$ denote the class of all 0- or -1 elements of $\mathbf{U}$: $a \in J$ if and only if $a \in \mathbf{U}$ and

$$a = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\mathfrak{N}), \quad \text{where } \Theta_i = 0 \text{ or } 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N}).$$

Theorem 15. $(J, \times, ^\wedge, ^\vee)$ *is a Boolean algebra,—a subframe of* $\mathfrak{U}$, *with* $a \times b$ *as Boolean intersection and* $a^\wedge = a^\vee$ *as Boolean complement,* $(a, b \in J)$.

Proof. From the definition of J, J is clearly closed with respect to the operations $\times$ and $^\wedge$, and hence also with respect to $\times_\wedge$, (5.8). Furthermore, the following definitive Boolean properties are easily verified: for $a, b, c \in J$,

$$a\,b = b\,a, \qquad a(b\,c) = (a\,b)\,c$$
$$a^2 = a, \qquad a^\wedge = a^\vee, \qquad a^{\wedge\wedge} = a$$
$$a \times_\wedge b = b \times_\wedge a, \qquad (a \times_\wedge b) \times_\wedge c = a \times_\wedge (b \times_\wedge c)$$
$$c(a \times_\wedge b) = c\,a \times_\wedge c\,b$$
$$c \times_\wedge a\,b = (c \times_\wedge a)\,(c \times_\wedge b)$$
$$0, 1 \in J, \qquad 0^\wedge = 1.$$

This proves the theorem.

We further observe that the Boolean algebra J is *absolute* in the sense: if $^{\wedge'}$ is any other $0 \leftrightarrow 1$ $\mathfrak{U}$-permutation and if $\mathcal{U}' = (U, \times, ^{\wedge'}, ^{\vee'})$, $\mathbf{U}' = (\mathbf{U}, \times, ^{\wedge'}, ^{\vee'})$ are the corresponding frames and $J' = (J', \times, ^{\wedge'})$ the corresponding Boolean sub-frame, then the Boolean algebras are identical, $J = J'$, $a^\wedge = a^{\wedge'}$, $(a \in J = J')$. We call $(J, \times, ^\wedge)$ the *(direct) regular sub-frame*, also the *regular (sub-) Boolean algebra*, or the *(direct) core* of $\mathbf{U}$. In particular we note that the regular Boolean algebra of $\mathfrak{U}$ (*qua* normal subdirect sum of itself) is simply the 2-element algebra $\{0, 1\}$.

Summarizing, we have proved

Theorem 16. *[(Direct) regular imbedding theorem.] A normal subdirect sum* $\mathbf{U}$ *of an f-algebra* $\mathfrak{U}$ *is an f-algebra in which* $\mathfrak{U}$ *is (isomorphically) imbedded as the regular subalgebra, and in which the regular Boolean algebra* $J = J(\mathbf{U})$ *is a sub-frame.*

13. The fundamental equivalence. We shall now prove that the Boolean extension- and the normal subdirect sum-theories are mathematically equivalent.

Theorem 17. *Fundamental equivalence theorem. The class of all Boolean extensions of an f-algebra,* $\mathfrak{U}$, *is coextensive, up to isomorphisms, with the class of all normal subdirect sums of* $\mathfrak{U}$.

Proof. We must establish (I): Given an f-algebra, $\mathfrak{U}$, and a Boolean algebra, J, there exists a normal subdirect sum $\mathfrak{U}$ such that $\mathfrak{U}_{[J]} \cong \mathfrak{U}$, and conversely, (II): Given a normal subdirect sum, $\mathfrak{U}$, there exists a Boolean algebra, J, such that $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}_{[J]}$.

Proof of (I). J may always be imbedded in a complete Boolean algebra J', $J \subseteqq J'$, where J and J' have the same null and universe elements. Let J' possess $\mathfrak{N}$ atoms $e_1, e_2, \ldots, e_{\mathfrak{N}}$[7]). We consider a mapping of the elements of $\mathfrak{U}_{[J]}$ onto a subset of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$,

$$(13.1) \qquad \mathbf{a} = [\mathbf{a}] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots] \to \mathbf{a} = (\mathbf{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathfrak{N}}),$$

where the components of $(\mathbf{a})$ are defined by:

$$(13.1) \qquad \alpha_i = \mu \quad \text{if} \quad e_i < a_\mu, \qquad (1 \leqq i \leqq \mathfrak{N}).$$

In words: α_i is that index $\mu\,(\in \mathfrak{U})$ such that a_μ includes the atom e_i.

Let (13.1) be called the *fundamental* mapping, and let $\mathfrak{U}$ denote the class of all images under the mapping,

$$\mathfrak{U} \subseteqq \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}.$$

We shall establish that $\mathfrak{U}$ has the properties required in (I).

Lemma 1. *The fundamental mapping* (13.1) *is* $1-1$ *between* $\mathfrak{U}_{[J]}$ *and* $\mathfrak{U}$.

Proof. Let $[\mathbf{a}] \to (\mathbf{a})$, $[\mathbf{\beta}] \to (\mathbf{\beta})$ under (13.1). Then for each $\mu \in \mathfrak{U}$, a_μ and b_μ include precisely the same atoms of J'. Since J' is complete this implies $a_\mu = b_\mu$ and hence $[\mathbf{a}] = [\mathbf{\beta}]$. This establishes the Lemma.

Let now $o = o(\xi, \eta, \ldots)$ be any primitive operation of the algebra $\mathfrak{U}$, $o([\xi], [\eta], \ldots)$—also written $o([\xi], [\eta], \ldots)$—its J-extension, and $o((\xi), (\eta), \ldots)$—also written $o((\xi), (\eta), \ldots)$—its direct extension to $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$.

Lemma 2. *The fundamental mapping is preserved under all primitive operations* o *of* $\mathfrak{U}$: *under* (13.1), *if* $[\mathbf{a}] \to (\mathbf{a})$, $[\mathbf{\beta}] \to (\mathbf{\beta})$, ... *then*

$$(13.2) \qquad o([\mathbf{a}], [\mathbf{\beta}], \ldots) \to o((\mathbf{a}), (\mathbf{\beta}), \ldots).$$

Proof. $o([\mathbf{a}], [\mathbf{\beta}], \ldots) \in \mathfrak{U}_{[J]}$, and under (13.1) let

$$(13.3) \qquad o([\mathbf{a}], [\mathbf{\beta}], \ldots) \to (\mathbf{\tau}) = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_{\mathfrak{N}}).$$

Here for each index i, $(1 \leqq i \leqq \mathfrak{N})$, the i^{th} components of $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{\beta})$, ... and $(\mathbf{\tau})$ are given by

$$(13.4) \qquad \alpha_i = \mu, \quad \text{where} \quad e_i < a_\mu$$

$$(13.5) \qquad \begin{cases} \beta_i = \nu & \text{where} \quad e_i < b_\nu \\ \vdots & \\ \tau_i = \sigma & \text{where} \quad e_i < \overset{\times\wedge}{\underset{o(\xi,\eta,\ldots)=\sigma}{\sum}} (a_\xi b_\eta \ldots). \end{cases}$$

[7]) As earlier, in connection with direct sums, despite the notation, $\mathfrak{N}$ may be of arbitrary cardinality; moreover no well ordering of the set $\{l_i\}$ of atoms is required.

For given i the atom e_i is included in exactly one of the components of $[\alpha]$, say a_μ, and in exactly one of the components of $[\beta]$, say $b_\nu, \ldots$ and hence in their intersection $a_\mu b_\nu \ldots$. We may then rewrite (13.5) in the form

$$\tau_i = \sigma, \quad \text{where} \quad \sigma = o(\mu, \nu, \ldots) \quad \text{and} \quad e_i < a_\mu b_\nu \ldots . \tag{13.5)'}$$

Consider now the i^{th} (direct) component of $o((\alpha), (\beta), \ldots)$,

$$o_i((\alpha), (\beta), \ldots) = o(\alpha_i, \beta_i, \ldots). \tag{13.6}$$

By (13.4) we have

$$\begin{cases} o_i((\alpha), (\beta), \ldots) = o(\mu, \nu, \ldots), & \text{where} \quad e_i < a_\mu \\ \qquad\qquad \vdots & \qquad\qquad e_i < b_\nu \\ \qquad\qquad \vdots & \qquad\qquad \vdots \end{cases} \tag{13.7}$$

A companion of (13.5)′ and (13.7) then establishes that

$$o_i((\alpha), (\beta), \ldots) = \tau_i \tag{13.8}$$

which, with (13.3), is the desired result (13.2). This proves the Lemma.

One has the immediate

Corollary. $\mathfrak{U}$, *the image subset of* $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ *under the fundamental mapping* (13.1), *is a subalgebra of* $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$.

We further establish

Lemma 3. *The image set,* $\mathfrak{U}$, *under* (13.1) *is a normal subdirect sum of* $\mathfrak{U}$.

Proof. We first show that for all $\alpha \in \mathfrak{U}$ and for all $\mu \in \mathfrak{U}$,

$$P_\mu(\alpha) \in \mathfrak{U}, \tag{13.9}$$

where $P_\mu(\alpha)$ is the μ^{th} projection of $\alpha = (\alpha)$. Let $(\alpha) \in \mathfrak{U}$ and let $[\alpha]$ be its preimage under (13.1); $[\alpha]$ is unique by Lemma 1,

$$[\alpha] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots] \leftrightarrow (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathfrak{N}}).$$

Choose $\mu \in \mathfrak{U}$. Suppose (case 1) some i exists such that $\alpha_i = \mu$. By (13.1) we have

$$\begin{cases} e_i < a_\mu \\ e_{i'} < a_\mu \quad \text{if and only if} \quad \alpha_i = \alpha_{i'}. \end{cases} \tag{13.10}$$

From (13.10), for the element $[a_\mu^*, a_\mu, 0, \ldots, 0, \ldots]$ of $\mathfrak{U}_{[J]}$,

$$[a_\mu^*, a_\mu, 0, \ldots, 0, \ldots] \to P_\mu(\alpha).$$

Hence $P_\mu(\alpha) \in \mathfrak{U}$. If (case 2) no i exists such that $\alpha_i = \mu$, then, from the definition of projection we have

$$P_\mu(\alpha) = 0 \qquad (= (0, 0, \ldots, 0, \ldots)).$$

But in this case, by forward reference to (13.10′) below, $P_\mu(\alpha)$ is again $\in \mathfrak{U}$. Hence, in any event, we have established (13.9).

Secondly we observe that all scalars, i.e., elements of the form $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ are $\in \mathfrak{U}$, since $1_\alpha = [0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots]$, ($\alpha^{\text{th}}$ component $= 1$) is $\in \mathfrak{U}_{[J]}$, and clearly, under (13.1)

$$1_\alpha \to (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha). \tag{13.10'}$$

For the case where the ground algebra or kernel, $\mathfrak{U}$, is finite, the proof of Lemma 3 is now complete; for the case where $\mathfrak{U}$ is an infinite algebra the proof is complete by forward reference to

Lemma 4. *If $\mathfrak{U}$ is an infinite f-algebra its image set, $\mathfrak{U}$, under the fundamental mapping (13.1) is a direct sum, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$.*

Proof. If $\mathfrak{U}$ is infinite, from the definition of $\mathfrak{U}_{[J]}$, J must be a complete Boolean algebra (§ 3). Let $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathfrak{N}})$ be any element of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$. We shall exhibit an $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}] \in \mathfrak{U}_{[J]}$ such that $[\mathfrak{a}] \to (\mathfrak{a})$ under (13.1).

In the foregoing terminology (with $J = J'$, since J is now already complete), let $[\mathfrak{a}] = [\ldots, a_\mu, \ldots]$ be defined by

$$a_\mu = \sum_{\alpha_i = \mu}^{\times\wedge} e_i, \tag{13.11}$$

that is: a_μ is the union of all atoms e_i of J for which $\alpha_i = \mu$. Here $a_\mu \in J$, since J is complete. Moreover the a_μ of (13.11) are pairwise disjoint and cover J,

$$a_\mu a_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu), \quad \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} a_\mu = 1. \tag{13.12}$$

Hence these a_μ define an $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}_{[J]}$ and, as apparent, $[\mathfrak{a}] \to (\mathfrak{a})$ under (13.1). This proves Lemma 4, and with it also completes the proof of part I of Theorem 17.

Proof of part II of Theorem 17. Let now $\mathfrak{U}$ be a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$ and let $J = J(\mathfrak{U})$ be its regular Boolean subalgebra § 12. With this choice of J we show that

$$\mathfrak{U}_{[J]} \cong \mathfrak{U}. \tag{13.13}$$

With each $\mathfrak{a} = (\mathfrak{c}) \in \mathfrak{U}$, let correspond an $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}] \in \mathfrak{U}_{[J]}$ defined by

$$\begin{cases} (\mathfrak{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathfrak{N}}) \to [\mathfrak{a}] = [\ldots, a_\mu, \ldots] \\ \qquad \text{where } a_\mu = P_\mu((\mathfrak{a})),\ \mu \in \mathfrak{U}. \end{cases} \tag{13.14}$$

These a_μ clearly define a J-partition vector $[\mathfrak{a}]$, since the a_μ are seen to satisfy (13.12). (Note that $\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} a_\mu$ always exists since, in case $\mathfrak{U}$ is infinite, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$, by Lemma 4, from which follows that $J = J(\mathfrak{U})$ is complete.)

The correspondence (13.14) is $1-1$ between $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{U}_{[J]}$ where (bearing in mind that each $a \in J$ is also a particular $\in \mathfrak{U}$) the inverse of (13.14) is seen to be

$$\begin{cases} [\mathfrak{a}] \to (\mathfrak{a}), \quad \text{where } \alpha_i = \sigma, \\ \text{with } \sigma \text{ determined by } P_\sigma((\mathfrak{a})) = a_\sigma, \quad (i = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N}). \end{cases} \tag{13.15}$$

There remains to establish that the 1 — 1 correspondence (13.14) is operation preserving, namely that: for each primitive operation o of $\mathfrak{U}$, if under (13.14)

$$(\alpha) \to [\alpha], \quad (\beta) \to [\beta], \ldots$$

then also $o((\alpha), (\beta), \ldots) \to o([\alpha], [\beta], \ldots)$. The proof of this is similar to the corresponding one of Lemma 1 and will here be omitted. This completes the proof of part II, and with it the proof of Theorem 17.

In proving Theorem 17 we have also demonstrated

Theorem 18. *In the fundamental isomorphism* $\mathfrak{U}_{[J]} \cong \mathfrak{U}$ *given by Theorem* 17, *if* $[\alpha] = [\ldots, a_\mu, \ldots] \leftrightarrow (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathfrak{N}})$, *then*

$$a_\mu \leftrightarrow P_\mu((\alpha)). \tag{13.16}$$

In particular the regular sub Boolean algebras (J-extension—and direct—) are in fundamental correspondence, and similarly for the regular subalgebras,

$$\begin{cases} J \cong J(\mathfrak{U}) \\ \mathfrak{l}_\alpha \leftrightarrow (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha). \end{cases} \tag{13.17}$$

14. Immediate Consequences. By means of Theorems 17 and 18 we may translate all results of the J-extension theory to normal subdirect form and conversely. For instance, in connection with Theorem 11 we have

Theorem 19. *Let* $\mathfrak{U}$ *be a normal subdirect sum of an f-algebra,* $\mathfrak{U}$, *and let* $f(\xi, \eta, \ldots)$ *be any* $\mathfrak{U}$*-function. Then, with* $\hat{}, \times_\wedge$ *referring to any* $\mathfrak{U}$*-frame,*

$$P_\mu(f(\xi, \eta, \ldots)) = \sum_{f(\alpha,\beta,\ldots)=\mu}^{\times\wedge} P_\alpha(\xi)\, P_\beta(\eta) \ldots$$

$$f(\xi, \eta, \ldots) = \sum_{\alpha,\beta,\ldots \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} f(\alpha, \beta, \ldots)\, P_\alpha(\xi)\, P_\beta(\eta) \ldots$$

$$(\mathfrak{U} = \textit{regular subalgebra of } \mathfrak{U}).$$

Again Theorem 9 is easily restated in normal subdirect form.

Theorem 20. *Let* $\mathfrak{U}$ *be a normal subdirect sum of the f-algebra,* $\mathfrak{U}$, *and identify* J *and* $\mathfrak{U}$ *with the (direct) core* (§ 12) *and (direct) kernel of* $\mathfrak{U}$ (§ 11). *Then* (6.2), (6.3), (6.4 *of Theorem* 9 *hold.*

Theorem 21. *Let* $\mathfrak{U}$ *be a normal subdirect sum of an f-algebra,* $\mathfrak{U}$. *A necessary and sufficient condition for* $\mathfrak{U}$ *to be a direct sum of* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$, *is that the Boolean core of* $\mathfrak{U}$ *be complete.*

Proof. The necessity is obvious. The sufficiency follows, since if J is complete $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{\mathfrak{N}}) \in \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$, then $P_\mu(\eta) \in \mathfrak{U}$. Hence $\eta = \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} \mu\, P_\mu(\eta) \in \mathfrak{U}$.

Since a finite Boolean algebra is necessary complete, we have

Corollary 22. *If* $\mathfrak{U}$ *is a finite and normal subdirect sum of an f-algebra,* $\mathfrak{U}$, *then* $\mathfrak{U}$ *is (isomorphic with) a direct sum of* $\mathfrak{U}$. *The order of* $\mathfrak{U}$ *is a power of the order of* $\mathfrak{U}$.

Again, corresponding to the abstract formulation of Theorem 12,

Theorem 23. *Let* $\mathfrak{V}$ *and* $\mathfrak{V}$ *be f-algebras. For* $\mathfrak{V}$ *to be a normal subdirect sum of* $\mathfrak{V}$ *it is necessary and sufficient ... etc. as in Theorem* 12.

Related stronger results will be obtained in § 18 for the case of a functionally complete finite kernel.

Remark on Corollary 22. The following example points up the importance of the concept *f*-algebra as opposed to the broader one of binary algebra. Consider the binary algebra (group with) null $\mathfrak{F} = (F, \times) = \{0, 1, 2\}$ belonging to $(F, \times, +)$, the field of 3 elements. Let

$$\boldsymbol{F} = \{(0,0), (1,1), (2,2), (1,0), (2,0), (0,1), (0,2)\}.$$

It is seen that $\mathfrak{F} = (\boldsymbol{F}, \times)$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{F}$, i.e., it contains all elements of the form (μ, μ), and with α, β it contains $\alpha \times \beta$ and all $P_\mu(\alpha)$. The Boolean core of $\mathfrak{F}$ is of course complete. But (compare with Corollary 22) $\mathfrak{F}$ is not a direct sum of $\mathfrak{F}$. Since $\mathfrak{F}$ is not an *f*-algebra this example shows that Corollary 22 need not be true if $\mathfrak{U}$ is merely a binary algebra. [If we replace $\mathfrak{F}$ by the *f*-algebra $(F_3, \times, -)$ or by $(F_3, \times, \hat{})$, it is seen that the set $\boldsymbol{F}$ is no longer a normal subdirect sum of (either of) the latter.]

C. $\times_\circ$-sums vs. $\times_\wedge$-sums.

15. $0 \to 1$ permutations. Let $\mathfrak{U}$ be an *f*-algebra and let $^\circ$ be a $0 \to 1$ permutation of U, i.e., one such that $0^\circ = 1$. Let $^\smile$ be the inverse of $^\circ$, whence, in particular, $1^\smile = 0$. If $\mathfrak{U}$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$, or, what is equivalent, a Boolean extension of $\mathfrak{U}$, consider the operations $^\circ$, $^\smile$ extended to $\mathfrak{U}$. By (4.1)

$$(15.1) \qquad \begin{cases} [\xi^\circ]_\mu = \overset{\times_\wedge}{\sum_{\alpha^\circ = \mu}} x_\alpha = x_{\mu^\smile} \\ [\xi^\smile]_\mu = \overset{\times_\wedge}{\sum_{\alpha^\smile = \mu}} x_\alpha = x_{\mu^\circ}. \end{cases}$$

From these, $^\circ$, $^\smile$ are obviously permutations of $\boldsymbol{U}$.

Let $\times_\circ$ be the $^\circ$-transform of $\times$, that is, by (4.1),

$$(15.2) \qquad \xi \times_\circ \eta = (\xi^\circ \times \eta^\circ)^\smile.$$

In particular one has

$$(15.3) \qquad 0 \times_\circ \eta = \eta \times_\circ 0 = 0 \times_\wedge \eta = \eta \times_\wedge 0 = \eta.$$

While $\times_\circ$ and $\times_\wedge$ are in general quite unrelated operations, (15.3) is an instance of the following important special case in which these are interchangeable.

Theorem 24. *If* ξ, η *are any* $\in \mathfrak{U}$ *and if* a, b *are disjoint* $\in J$ (= *core of* $\mathfrak{U}$), *then*

$$a\,\xi \times_\circ b\,\eta = b\,\eta \times_\circ a\,\xi = a\,\xi \times_\wedge b\,\eta = b\,\eta \times_\wedge a\,\xi.$$

Proof. Using the normal subdirect sum version, let

$$a\,\xi\,(=\xi\,a)=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_i,\ldots)$$
$$b\,\eta\,(=\eta\,b)=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_i,\ldots).$$

Since $a\,b=0$ it follows that:

(15.4) for each i, either γ_i or $\tau_i=0$.

For such γ_i, τ_i evidently

$$\gamma_i\times_{\cap}\tau_i=(\gamma_i^{\cap}\tau_i^{\cap})^{\cup}=\gamma_i\times_{\wedge}\tau_i=(\gamma_i^{\wedge}\tau_i^{\wedge})^{\vee}.$$

Since

$$a\,\xi\times_{\cap}b\,\eta=((\gamma_1^{\cap}\tau_1^{\cap})^{\cup},\ldots,(\gamma_i^{\cap}\tau_i^{\cap})^{\cup},\ldots)$$

the proof of Theorem 24 is complete.

In view of this we may replace $\times_{\wedge}$ by $\times_{\cap}$ in a normal expansion. That is,

Theorem 25. *If* $\mathfrak{U}$ *is a normal subdirect sum of an* f*-algebra,* $\mathfrak{U}$*, if* $f(\xi,\eta,\ldots)$ *is any* $\mathfrak{U}$*-function and if* $^{\wedge}$, $^{\cap}$ *are the extensions to* $\mathfrak{U}$ *of a* $0\leftrightarrow 1$ *respectively of a* $0\to 1$ $\mathfrak{U}$*-permutation, then*

$$(15.5)\quad f(\xi,\eta,\ldots)=\sum_{\alpha,\beta,\ldots\in\mathfrak{U}}^{\times_{\wedge}} f(\alpha,\beta,\ldots)\,[\xi]_{\alpha}\,[\eta]_{\beta}\ldots=\sum_{\alpha,\beta,\ldots\in\mathfrak{U}}^{\times_{\cap}} f(\alpha,\beta,\ldots)\,[\xi]_{\alpha}\,[\eta]_{\beta}\ldots.$$

Remark. An important application of the above Theorem occurs when a binary $\mathfrak{U}$-function, $+$, exists, such that $\mathfrak{U}=(U,\times,+)$ is a ring[8]). By choosing $\xi^{\cap}=1+\xi$ we have

$$(15.6)\qquad \alpha\times_{\cap}\beta=(\alpha^{\cap}\beta^{\cap})^{\cup}=\alpha+\beta-\alpha\,\beta.$$

In particular, if $\alpha\,\beta=0$,

$$(15.7)\qquad \alpha\times_{\cap}\beta=\alpha+\beta.$$

Hence, in this case, we may replace (15.5) by

$$(15.8)\qquad f(\xi,\eta,\ldots)=\sum_{\alpha,\beta,\ldots\in\mathfrak{U}}^{+} f(\alpha,\beta,\ldots)\,[\xi]_{\alpha}\,[\eta]_{\beta}\ldots.$$

This is the situation, for instance, in the case of p-rings, and in p^R-rings (see [*11*], [*12*]).

D. Functional Completeness.

16. Characteristic functions. Let $\mathfrak{U}=(U,\times,o,\ldots)$ be a binary algebra. For $\mu\in\mathfrak{U}$, the μ^{th} *characteristic function* $\delta_{\mu}=\delta_{\mu}(\xi)$ and the μ^{th} *alternate characteristic function* $\Delta_{\mu}=\Delta_{\mu}(\xi)$ are the U-functions defined by

$$(16.1)\qquad \begin{cases}\delta_{\mu}(\xi)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad \xi=\mu\\ 0 & \text{if}\quad \xi\neq\mu\end{cases}\\ \Delta_{\mu}(\xi)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad \xi=\mu\\ 1 & \text{if}\quad \xi\neq\mu\end{cases}\end{cases}\qquad(\xi\in\mathfrak{U}).$$

[8]) Actually somewhat less is required. We use only that $+$ is associative and commutative, that $\times$ distributes over $+$, that $1+\xi$ is a permutation of U and that $0+\xi=\xi$.

For $\mu = 0$ we write

$$(16.2) \qquad \begin{cases} \delta(\xi) = \delta_0(\xi) = \xi^{\delta} = \text{principal characteristic function} \\ \Delta(\xi) = \Delta_0(\xi) = \xi^{\Delta} = \text{principal alternate function} \end{cases}$$

Let $^{\circ} = \xi^{\circ}$ be a $0 \to 1$ U-permutation (§ 15) and let $^{\cup} = \xi^{\cup}$ denote the inverse permutation.

Theorem 26. *In a binary algebra each principal characteristic function is expressible in terms of the other by the formulas*

$$(16.3) \qquad \xi^{\Delta} = (0^{\cup}\,\xi^{\delta})^{\circ}; \qquad \xi^{\delta} = (0^{\cup}\,\xi^{\Delta})^{\circ}.$$

More generally

$$(16.4) \qquad \Delta_{\mu}(\xi) = (0^{\cup}\,\delta_{\mu}(\xi))^{\circ}; \qquad \delta_{\mu}(\xi) = (0^{\cup}\,\Delta_{\mu}(\xi))^{\circ}.$$

The formulas above are easily verified by (16.1).

By § 2 the $^{\circ}$ and $^{\cup}$ transforms of $\times$ are given by

$$(16.5) \qquad \xi \times_{\circ} \eta = (\xi^{\circ}\,\eta^{\circ})^{\cup}; \qquad \xi \times_{\cup} \eta = (\xi^{\cup}\,\eta^{\cup})^{\circ}.$$

With $^{\circ}$ as a $0 \to 1$ permutation one then has

$$(16.6) \qquad \begin{cases} 0 \times_{\circ} \eta = \eta \times_{\circ} 0 = \eta \\ 1 \times_{\cup} \eta = \eta \times_{\cup} 1 = 1. \end{cases}$$

We shall require the obvious extension of (16.6),

Lemma 5. *If $\sigma, \tau, \ldots$ are $\in \mathfrak{U}$ of which all except possibly one is 0, then the set is completely $\times_{\circ}$-commutative and associative, and we may unambiguously write $\sigma \times_{\circ} \tau \times_{\circ} \ldots$. Similarly if all except possibly one term is 1, the set is $\times$-commutative and completely associative, and we may unambiguously write $\sigma \times \tau \times \ldots$.*

17. Functional completeness. Let $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ now be a finite binary algebra of order $n\,(n \geqq 2)$—see § 2. We note, if $\mathfrak{U}$ possesses a $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $^{\circ}$, then its inverse, $^{\cup}$, is also such. For, since $\mathfrak{U}$ is finite, for some fixed k, $f^{\circ k} = \xi$, whence $\xi^{\cup} = \xi^{\circ k-1}$. Here $\xi^{\circ k} = (\ldots((\xi^{\circ})^{\circ})\ldots)$, k iterations.

A $0 \to 1$ U-permutation, $^{\circ}$, is called *transitive* if for given $\alpha, \beta \in \mathfrak{U}$ there exists an r such that $\alpha^{\circ r} = \beta$, or, otherwise stated, if for all $\xi \in \mathfrak{U}$: $\xi^{\circ n} = \xi$, $\xi^{\circ n'} \neq \xi$ for $n' < n =$ order of $\mathfrak{U}$.

Theorem 27. *Let $\mathfrak{U}$ be a finite binary algebra. Each of the following conditions is sufficient (and obviously necessary) to insure that $\mathfrak{U}$ is functionally complete:*

(1°) *Each $\delta_{\mu}(\xi)$, $(u \in \mathfrak{U})$, be expressible as a $\mathfrak{U}$-function, and there exist a $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $^{\circ}$.*

(2°) *Each $\Delta_{\mu}(\xi)$ be expressible as a $\mathfrak{U}$-function, and there exist a $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $^{\circ}$.*

(3°) *$\delta(\xi)$ be expressible as a $\mathfrak{U}$-function, and there exist a transitive $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation.*

(4°) *$\Delta(\xi$ be expressible as a $\mathfrak{U}$-function, and there exist a transitive $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation.*

Proof. Consider (1°). We have the identity

$$f(\xi,\eta,\ldots)=\sum_{\alpha,\beta,\ldots\in\mathfrak{U}}^{\times\cap} f(\alpha,\beta,\ldots)\,(\delta_\alpha(\xi)\,\delta_\beta(\eta)\ldots), \tag{17.1}$$

where $f(\xi,\eta,\ldots)$ is any U-function, and where Lemma 5 is employed. Under the hypothesis of (1°) the right of (16.1) is a $\mathfrak{U}$-function, and (1°) is proved.

(2°) follows by application of (16.4) to (17.1). Finally we have, if $^\cap$ is a transitive $0\to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation,

$$\begin{cases}\delta_\mu(\xi)=\delta(\xi^{\cap r})\\ \Delta_\mu(\xi)=\Delta(\xi^{\cap r})\end{cases} \tag{17.2}$$

where r is determined by

$$\mu^{\cap r}=0.$$

Hence (3°) and (4°) follow on application of (17.2) to (1°) and (2°). This proves Theorem 27.

Theorem 28. *Let $\mathfrak{U}$ be a finite binary algebra. If $\delta(\xi)$, or if $\Delta(\xi)$ is expressible as a $\mathfrak{U}$-function, and if there exists a strict transitive $0\to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $^\cap$, then $\mathfrak{U}$ is functionally strictly complete.*

Proof. Let $\mathfrak{U}$ be of order n. For an $^\cap$ as postulated,

$$\left(\ldots\left(\left(\xi\,\xi^{\cap}\right)\xi^{\cap 2}\right)\xi^{\cap 3}\right)\ldots\xi^{\cap n-1}\Big)=0,\qquad(\xi\in\mathfrak{U}). \tag{17.3}$$

Since $0,\ 0^\cap(=1),\ 0^{\cap 2},\ \ldots,\ 0^{\cap n-1}$ are the elements of $\mathfrak{U}$ (in some order), it follows that any fixed element α of $\mathfrak{U}$ can be represented by a strict $\mathfrak{U}$-function, $f(\xi)=\alpha$. Therefore, in particular, $\delta(\xi)$ and $\Delta(\xi)$ can also be represented as strict $\mathfrak{U}$-functions, simply by replacing any constant which might occur in the $\mathfrak{U}$-function expressions by corresponding strict $\mathfrak{U}$-functions. The proof is then complete, by Theorem 27.

18. Special complete binary algebras. By a *group with null*, $(G,\times)$, we mean simply a group augmented by a null-element, 0, satisfying $0\times g=g\times 0=0$, $(g\in G)$. If $(G,\times)$ is finite, of order n, the "corresponding" group $(=G$ less $0)$ is of order $n-1$. A group with null is of couse a special type of binary algebra.

Theorem 29. *Let $(G,\times)$ be a group with null of order n, and let*

$$0,1,g_2,g_3,\ldots,g_{n-1} \tag{18.1}$$

be any arrangement of its elements. If the (transitive $0\to 1$) G-permutation, $^\cap$, is defined accordingly, i.e.,

$$0^\cap=1,\quad 1^\cap=g_2,\quad g_2^\cap=g_3,\ldots,g_{n-1}^\cap=0$$

then $\mathcal{G}=(G,\times)$, is strictly complete.

Proof. We have

$$\Delta(g)=g^{n-1},\qquad(g\in\mathcal{G}). \tag{18.2}$$

Since this is a strict $\mathcal{G}$-function, and since $^\cap$ is also strict, the proof follows from Theorem 28.

We supply proof of the following two familiar theorems on fields:

Theorem 30. $\mathfrak{F}_p = (F_p, \times, +)$, *the field of residues mod* p, *is functionally complete.*

Proof. $(F_p, \times)$ is here a group with null, and since a transitive $0 \to 1$ $\mathfrak{F}_p$-permutation exists, for instance

$$\chi^\circ = 1 + \chi, \tag{18.3}$$

the Theorem follows from Theorem 27 and (18.2).

Theorem 31. $\mathfrak{F}_{p^k} = (F_{p^k}, +, \times)$, *the Galois field of* p^k *elements, is functionally complete.*

Proof. $(F_{p^k}, \times)$ is again a group with null. Let λ be a multiplicative generator. Then

$$0, 1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{p^k-2} \tag{18.4}$$

are the elements of $\mathfrak{F}_{p^k}$, in some order. The cyclic permutation

$$0^\circ = 1, \quad 1^\circ = \lambda, \ldots, (\lambda^{p^k-2})^\circ = 0 \tag{18.5}$$

corresponding to (18.4) is of course transitive and $0 \to 1$, and is expressible as an $\mathfrak{F}_{p^k}$-function by (compare with [*12*]),

$$\chi^\circ = \lambda\chi + 1 + \lambda\chi + \lambda^2\chi^2 + \lambda^3\chi^3 + \cdots + \lambda^{p^k-2}\chi^{p^k-2}, \qquad (\chi \in \mathfrak{F}_{p^k}). \tag{18.6}$$

The proof then follows, again by Theorem 27 and (18.2).

Remark. While $\mathfrak{F}_p = (F_p, \times, -)$ is functionally complete it is not *strictly* complete, since it may be shown that the constant 1 cannot be expressed as a strict $\times$, $+$ function. In $\mathfrak{F}_{p^k}$ a similar remark applies to the generator λ. With $\times$, $^\circ$ taken as primitive operations, both $(F_p, \times, ^\circ)$ and $(F_{p^k}, \times, ^\circ)$ are strictly complete.

It is further noteworthy (see [*12*]) that (18.6) and (18.3) are rivals, even when $k = 1$; exceptions are $p = 2$ and $p = 3$, in which cases—with $k = 1$—(18.6) reduces to (18.3).

The system $(F_{p^k}, \times, ^\circ)$, with $^\circ$ now *defined* as the cyclic permutation (18.5) rather than by (18.6), leads to a strictly multiplicative theory of (finite) fields. This is further related to the theory of ring-logics etc., for which [*12*] and the references there cited may be consulted.

The p^k-field (= Galois field) may be extended in a natural manner to an "n-field". Let $n\,(n \geqq 2)$ be any integer, and let $F_n, \times)$ be the cyclic group with null, of order n (i.e., with the cyclic group of order $n-1$ as corresponding group). Let λ be a generator, whence the elements of F_n, in same order, are given by

$$0, 1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^{n-2} \qquad (\lambda^{n-1} = 1). \tag{18.7}$$

Let $\cap = \cap(\lambda)$ be defined correspondingly,

$$0^\cap = 1, \quad 1^\cap = \lambda, \ldots, (\lambda^{n-2})^\cap = 0. \tag{18.8}$$

By analogy with $(F_{p^k}, \times^{\circ},)$ let us call $(F_n, \times, ^{\circ})$ the *n-field*. From Theorem 29 we then have

Theorem 32. *The n-field* $(F_n, \times, ^{\circ})$ *is a strictly complete binary algebra.*

A study of n-fields is hardly germane to the trend of the present paper and is reserved for a subsequent communication.

Theorem 33. *Let* $(A, \times)$ *be a finite binary algebra in which the product of its non-null elements, in some order and association,* $\neq 0$. *Then there exists a transitive* $0 \to 1$ *permutation,* $^{\circ}$, *of* A *such that* $\mathfrak{A} = (A, \times, ^{\circ})$ *is a strictly complete binary algebra.*

Proof. Let

$$0, 1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1} \tag{18.9}$$

be the elements of A. We shall prove the theorem under the assumption that the following association $\neq 0$,

$$\left(\ldots\left(\left(\left(1 \times b_2\right) b_3\right) b_4\right) \ldots b_{n-1}\right) = b_k \neq 0. \tag{18.10}$$

The argument below may be modified in an obvious way in case the product of $1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ in some other association $\neq 0$.

Case 1, $b_k = 1$. Let $^{\circ}$ be defined by the ordering (18.9), i.e., let

$$0^{\circ} = 1, \qquad 1^{\circ} = b_2, \ldots, b_{n-1}^{\circ} = 0. \tag{18.11}$$

One then verifies the identity,

$$\left(\ldots\left(\left(x^{\circ}\, x^{\circ 2}\right) x^{\circ 3}\right) \ldots\right) x^{\circ n-1} = \delta(x),$$

from which the theorem follows, by Theorem 28.

Case 2, $b_k \neq 1$. Let $^{\circ}$ now be defined by the ordering

$$0, 1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_{k-1}, b_{k+2}, \ldots, b_{n-1}, b_k. \tag{18.12}$$

That is, let

$$0^{\circ} = 1, 1^{\circ} = b_2, \ldots, b_{k-1}^{\circ} = b_{k+1}, \ldots, b_{n-1}^{\circ} = b_k, b_k^{\circ} = 0. \tag{18.13}$$

Here one verifies the identity,

$$\left(\left(\ldots\left(\left(\left(\ldots\left(\left(x^{\circ}\, x^{\circ 2}\right)\, x^{\circ 3}\right) \ldots x^{\circ k-1}\right) x^{\circ n-1}\right) x^{\circ k}\right) x^{\circ k+1}\right) \ldots\right) x^{\circ n-2}\right)^{\circ} = \Delta(x). \tag{18.14}$$

The theorem then again follows, from Theorem 28.

As in the case of rings, $a \neq 0$ and $b \neq 0$ such that $a\, b = 0$ are called 0-divisors of $(A, \times)$. Theorem 11 has the immediate

Corollary 34. *Let* $(A, \times)$ *be a binary algebra without* 0*-divisors. Then there exists a* $0 \to 1$ *A-permutation,* $^{\circ}$, *such that* $(A, \times, ^{\circ})$ *is functionally strictly complete.*

We shall conclude this section with a proof of the completeness of the basic Post algebra (compare with [14]). Let P_n be a class of $n\,(\geq 2)$ elements

which we order sequentially with the "least" being denoted by 0 and the "greatest" by 1,

$$0, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_3, a_2, 1. \tag{18.15}$$

Let $x \times y \ (= x\,y) = \min(x, y)$ the minimum of x, y, and let $^\frown$ be defined by

$$0^\frown = 1, 1^\frown = a_2, a_2^\frown = a_3, \ldots, a_{n-1}^\frown = 0, \tag{18.16}$$

or, if one prefers, by

$$a_i^\frown = a_{i+1 \pmod n}, \qquad (\text{with } 0 = a_0, 1 = a_1). \tag{18.16}$$

Let us call the binary algebra

$$(P_n, \times, ^\frown)$$

the *basic Post algebra* of order n. We give a proof of the familiar

Theorem 35. *The basic Post algebra* $(P_n, \times, ^\frown)$ *is functionally strictly complete.*

Proof. The $\times$ of the algebra is associative. One may verify the identity

$$\Delta(x) = (x^\frown x^{\frown 2} x^{\frown 3} \ldots x^{\frown n-1})^\frown, \qquad (x \in P_n),$$

from which the Theorem follows by Theorem 28.

E. Identities.

19. The fundamental theorem on identities. If $\mathfrak{B}$, with elements $\{\ldots, \xi, \ldots\}$ is a universal algebra and $\mathfrak{A}$, with elements $\{\ldots, \xi, \ldots\}$ is a subalgebra there of, then each $\mathfrak{A}$-function $f(\xi, \ldots)$ extends to a $\mathfrak{B}$-function $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$. While the converse is not generally true, each *strict* $\mathfrak{B}$-function descends, in $\mathfrak{A}$, to a corresponding $\mathfrak{A}$-function.

Further, if

$$f(\xi, \ldots) = g(\xi, \ldots) \tag{19.1}$$

is an $\mathfrak{A}$-identity (§ 2) and if $f(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ and $g(\boldsymbol{\xi}, \ldots)$ are the extensions to $\mathfrak{B}$ of the two members of (19.1), then

$$f(\boldsymbol{\xi}, \ldots) = g(\boldsymbol{\xi}, \ldots) \tag{19.2}$$

is in general *not* a $\mathfrak{B}$-identity. If however (19.2) is a $\mathfrak{B}$-identity we say that the $\mathfrak{A}$-identity (19.1) *extends* to $\mathfrak{B}$.

Theorem 36. *Let* $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{B}, \times, o, \ldots) = \{\ldots, \boldsymbol{\xi}, \ldots\}$ *be a binary algebra and* $\mathfrak{U} = (U, \times, o, \ldots)$ *a subalgebra such that*

(1°) *the* 0 *and* 1 *of* $\mathfrak{B}$ *are* $\in \mathfrak{U}$.

(2°) $\mathfrak{U}$ *is finite and functionally complete.*

(3°) *every* $\mathfrak{U}$*-identity extends to* $\mathfrak{B}$.

Then $\mathfrak{U}$ *is an f-algebra and* $\mathfrak{B}$ *is a normal subdirect sum of* $\mathfrak{U}$.

Proof. That $\mathfrak{U}$ is an f-algebra is clear since every functionally complete binary algebra is obviously such,—though not generally conversely. Using (2°), let each of the characteristic functions $\delta(\xi) = \delta_0(\xi)$, $\delta_1(\xi), \ldots, \delta_\mu(\xi), \ldots$ of $\mathfrak{U}$ ($\mu \in \mathfrak{U}$), be expressed in an arbitrary but fixed way as a $\mathfrak{U}$-function; also select an arbitrary but fixed $0 \leftarrow 1$ $\mathfrak{U}$-permutation, $\xi^\wedge$, and an arbitrary but fixed transitive $\mathfrak{U}$-permutation, $\xi^\frown$. Let $\delta(\xi), \ldots, \delta_\mu(\xi)$, $\xi^\wedge, \xi^\frown$ be the corresponding $\mathfrak{B}$-functions, i.e., the extensions of $\delta(\xi)$, etc. to $\mathfrak{B}$.

Definition. Let $J = J(\mathfrak{B})$ denote the range of $\delta(\xi)$, i.e.,

$$a \in J \Longleftrightarrow a = \delta(\alpha) \quad \text{for some} \quad \alpha \in \mathfrak{B}. \tag{19.3}$$

Of course $J \subseteqq \mathfrak{B}$.

Lemma 6. *0 and 1 are $\in J$ and $(J, \times, ^\wedge)$ is a Boolean algebra with $\times$, $^\wedge$ as intersection and complement.*

Proof. We have

$$0 = \delta(1), \qquad 1 = \delta(0)$$

whence $0, 1 \in J$. Consider the $\mathfrak{U}$-identities

$$\delta^\wedge(\xi) = \delta(\delta(\xi)) \tag{19.4}$$

$$\delta(\xi)\,\delta(\eta) = \delta(\{\delta(\xi)\,\delta(\eta)\}^\wedge). \tag{19.5}$$

Using (3°), the extension of (19.4) to $\mathfrak{B}$, i.e.,

$$\delta^\wedge(\mathfrak{x}) = \delta(\delta(\mathfrak{x}))$$

says that J is closed with respect to $^\wedge$: $a \in J$ implies $a^\wedge \in J$. The extension of (19.5) to $\mathfrak{B}$ then says the same for $\times$: $a, b \in J$ implies $a\,b \in J$. Consider the further $\mathfrak{U}$-identities

$$\begin{cases} \delta(\xi)\,\delta(\eta) = \delta(\eta)\,\delta(\xi) \\ \delta(\xi)\,(\delta(\eta)\,\delta(\varphi)) = (\delta(\xi)\,\delta(\eta))\,\delta(\varphi) \\ \delta^{\wedge\wedge}(\xi) = \delta(\xi). \end{cases} \tag{19.6}$$

For $\times_\wedge$, namely

$$\xi \times_\wedge \eta = (\xi^\wedge \eta^\wedge)^\vee$$

we then have the additional $\mathfrak{U}$-identities:

$$\begin{cases} \delta(\xi) \times_\wedge \delta(\eta) = \delta(\eta) \times_\wedge \delta(\xi) \\ (\delta(\xi) \times_\wedge \delta(\eta)) \times_\wedge \delta(\varphi) = \delta(\xi) \times_\wedge (\delta(\eta) \times_\wedge \delta(\varphi)) \\ \delta(\xi)\,(\delta(\eta) \times_\wedge \delta(\varphi)) = \delta(\xi)\,\delta(\eta) \times_\wedge \delta(\xi)\,\delta(\varphi). \end{cases} \tag{19.7}$$

The extension of all these to $\mathfrak{B}$ are then $\mathfrak{B}$-identities, by (3°), and these are well known to be definitive for a Boolean algebra. $(J, \times, ^\wedge)$ is then a Boolean algebra, which completes the Lemma.

Lemma 7. *For given $\mu \in \mathfrak{U}$, J is identical with the range of $\delta_\mu(\mathfrak{x})$.*

Proof. We have the $\mathfrak{U}$-identities

$$\begin{cases} \delta(\xi) = \delta_\mu(\xi^{\frown r}) \\ \delta_\mu(\xi) = \delta(\xi^{\frown s}). \end{cases} \tag{19.8}$$

Here r and s are fixed by

$$\mu = 0^{\frown r}$$
$$\mu^{\frown s} = 0 .$$

These yield corresponding $\mathfrak{V}$-identities which are readily seen to prove the Lemma.

Let us call $(J, \diagdown, \hat{})$ the *Boolean algebra of* $\mathfrak{V}$ *(determined by* $\mathfrak{U}$*)*.

We list, as Lemma 8, a number of $\mathfrak{V}$-identities obtained from evident corresponding $\mathfrak{U}$-identities, by condition (3°).

Lemma 8.

$$\xi\,\delta(\eta) = \delta(\eta)\,\xi, \quad \textit{equiv.} \quad \xi\,a = a\,\xi \;\; (a \in J;\ \xi \in \mathfrak{V}).$$
$$\xi\,\{\delta(\eta)\,\delta(\varphi)\} = \{\xi\,\delta(\eta)\}\,\delta(\varphi), \quad \textit{equiv.} \quad \xi\,(a\,b) = (\xi\,a)\,b, \qquad (a, b \in J;\ \xi \in \mathfrak{V}).$$
$$\xi\,(\eta\,\delta(\varphi)) = (\xi\,\eta)\,\delta(\varphi), \quad \textit{equiv.} \quad \xi(\eta\,a) = (\xi\,\eta)\,a, \qquad (a \in J;\ \xi, \eta \in \mathfrak{V}).$$

$$(19.9) \qquad \begin{cases} \delta_\alpha(\xi)\,\delta_\alpha(\xi) = \delta_\alpha(\xi) \\ \delta_\alpha(\xi)\,\delta_\beta(\xi) = 0, \qquad (\alpha \neq \beta) \\ \overset{\diagdown\wedge}{\sum_{\alpha \in \mathfrak{U}}} \delta_\alpha(\xi) = 1 . \end{cases}$$

$$\alpha\,\delta_\alpha(\xi) \times_\vee \beta\,\delta_\beta(\xi) = \beta\,\delta_\beta(\xi) \times_\wedge \alpha\,\delta_\alpha(\xi), \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{U};\ \alpha \neq \beta).$$

$$\alpha\,\delta_\alpha(\xi) \diagdown_\wedge (\beta\,\delta_\beta(\xi) \times_\wedge \gamma\,\delta_\gamma(\xi)) = (\alpha\,\delta_\alpha(\xi) \times_\wedge \beta\,\delta_\beta(\xi)) \times_\wedge \gamma\,\delta_\gamma(\xi),$$
$$(\alpha, \beta, \gamma \textit{ all different} \in \mathfrak{U}):$$

Employing the last identity of Lemma 8 we have the further identities, each obtained from condition (3°) and the evident corresponding $\mathfrak{U}$-identity.

Lemma 9.

$$\xi = \overset{\diagdown\wedge}{\sum_{\mu \in \mathfrak{U}}} \mu\,\delta_\mu(\xi) .$$

For a strict $\mathfrak{V}$*-function,* o*, in particular, for a primitive operation of the algebra* $\mathfrak{V}$*,*

$$(19.10) \qquad \begin{cases} \delta_\mu(o(\xi, \eta, \ldots)) = \overset{\diagdown\wedge}{\sum_{o(\alpha, \beta, \ldots) = \mu}} (\delta_\alpha(\xi)\,\delta_\beta(\eta)\ldots), \quad (\mu \in \mathfrak{U}). \\ o(\xi, \eta, \ldots) = \overset{\times\wedge}{\sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}}} o(\alpha, \beta, \ldots)\,\delta_\alpha(\xi)\,\delta_\beta(\eta)\ldots . \end{cases}$$

Let us now conceive the algebra $\mathfrak{U}$ and the Boolean algebra J of $\mathfrak{V}$ abstractly, and synthesize $\mathfrak{U}_{[J]}$. The elements of $\mathfrak{U}_{[J]}$ are the J-partition vectors

$$[\alpha] = \alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots],$$
$$a_\mu a_\nu = 0\ (\mu \neq \nu), \quad \overset{\times\wedge}{\sum} a_\mu = 1 ,$$

and the $\mathfrak{U}$-function, o, extended to $\mathfrak{U}_{[J]}$ has the idempotent components

$$[o(\alpha, \beta, \ldots)]_\mu = \overset{\times\wedge}{\sum_{o(\sigma, \tau, \ldots) = \mu}} (a_\sigma b_\tau \ldots) .$$

We establish the following *basic mapping* of the set $\mathfrak{V}$ into the set $\mathfrak{U}_{[J]}$:

$$\mathfrak{V} \to \mathfrak{U}_{[J]}\colon\ \xi \to [\xi] = [\delta_0(\xi), \delta_1(\xi), \ldots, \delta_\mu(\xi), \ldots], \quad (\mu \in \mathfrak{U}). \tag{19.11}$$

By Lemma 8 the $[\delta_0(\xi), \ldots]$ on the right is seen to be $\in \mathfrak{U}_{[J]}$. We next prove

Lemma 10. *The basic mapping* (19.11) *is a homomorphism from the algebra* $\mathfrak{V}$ *onto the algebra* $\mathfrak{U}_{[J]}$.

Proof. We must show that if $\xi \to [\xi], \eta \to [\eta], \ldots$ under (19.11) then also for each strict function o,

$$o(\xi, \eta, \ldots) \to o([\xi], [\eta], \ldots).$$

This is equivalent to establishing that

$$\delta_\mu(o(\xi, \eta, \ldots)) = \sum_{o(\alpha, \beta, \ldots) \in \mu}^{\times\wedge} \delta_\alpha(\xi)\, \delta_\beta(\eta) \ldots .$$

But this is precisely a result of Lemma 9, and Lemma 10 is established.

Lemma 11. *Let* $[\alpha] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots]$ *be an element of* $\mathfrak{U}_{[J]}$. *There exists one and only one* $\alpha \in \mathfrak{V}$ *such that* $\alpha \to [\alpha]$ *under* (19.11), *and the basic mapping is an isomorphism* $\mathfrak{V} \leftrightarrow \mathfrak{U}_{[J]}$ *between the corresponding algebras. The element* α *is given by*

$$\alpha = \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} \mu\, a_\mu, \tag{19.12}$$

and

$$a_\mu = \delta_\mu(\alpha).$$

Proof. Consider first $a = \delta(\alpha) = \in J$, and its image $a \to ?$ under (19.11). By (19.11),

$$a \to [\delta_0(a), \delta_1(a), \ldots, \delta_\mu(a), \ldots] = [\delta_0(\delta(\alpha)), \ldots, \delta_\mu(\delta(\alpha))]. \tag{19.13}$$

Now by extension to $\mathfrak{V}$ of evident corresponding $\mathfrak{U}$-identities we have the $\mathfrak{V}$ identities

$$\begin{cases} \delta(\delta(\xi)) = \delta^\wedge(\xi) \\ \delta_1(\delta(\xi)) = \delta(\xi) \\ \delta_\mu(\delta(\xi)) = 0 \quad (\mu \neq 0, \neq 1). \end{cases} \tag{19.14}$$

From these and (19.13) it follows that, under (19.11),

$$a(= \delta(\alpha)) \to [a^\wedge, a, 0, 0, \ldots]. \tag{19.15}$$

Secondly, under (19.11) for $\alpha \in \mathfrak{U}$ we have

$$\alpha \to [\delta_0(\alpha), \delta_1(\alpha), \ldots, \delta_\mu(\alpha), \ldots],$$

that is,

$$\alpha \to \mathbf{1}_\alpha = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots], \quad (1 \text{ in } \alpha^{\text{th}} \text{ place}). \tag{19.16}$$

Let now $[\alpha] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots]$ be an arbitrary $\in \mathfrak{U}_{[J]}$. For each a_μ, *qua* $\in \mathfrak{B}$, and for each $\mu \in \mathfrak{U}$, *qua* $\in \mathfrak{B}$, we have shown: under (19.11)

$$a_\mu \to [a_\mu^\wedge, a_\mu, 0, 0, \ldots]; \qquad \mu \to [\ldots, 0, 1, 0, \ldots] = \mathbf{1}_\mu. \tag{19.17}$$

For the element α of $\mathfrak{B}$ given by

$$\alpha = \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} \mu\, a_\mu \tag{19.18}$$

we thus have from (19.17), (19.18) and Lemma 10: under (19.11)

$$\alpha \to \sum^{\times\wedge} \mathbf{1}_\mu \times [a_\mu^\wedge, a_\mu, 0, 0, \ldots]. \tag{19.19}$$

The $\sum^{\times\wedge}$ on the right of (19.19), computed by § 5, reduces simply to $[a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots]$. Therefore, under (19.11)

$$\alpha \to [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots]. \tag{19.20}$$

From the definition of (19.11) it then follows that

$$a_\mu = \delta_\mu(\alpha). \tag{19.21}$$

That α is unique we see as follows. Suppose β to be another $\in \mathfrak{B}$ such that $\beta \to [\alpha] = [a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots]$ under (19.11). Then, repeating the above argument for β instead of α, we have

$$\delta_\mu(\beta) = \delta_\mu(\alpha) = a_\mu. \tag{19.22}$$

But from Lemma 9,

$$\beta = \sum \mu\, \delta_\mu(\beta) = \sum \mu\, \delta_\mu(\alpha) = \alpha. \tag{19.23}$$

This completes the proof of Lemma 10.

Since $\mathfrak{U}_{[J]}$ is isomorphic with a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$ (Theorem 17), the proof of Theorem 36 is now immediate from Lemma 10.

Remark. If we attempt to weaken the hypothesis of Theorem 36 by omitting the expression "functionally complete" from condition (2°) of the Theorem, one can (in general) no longer conclude that $\mathfrak{B}$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$,—indeed one cannot even conclude that $\mathfrak{B}$ is a subalgebra of a direct sum of $\mathfrak{U}$. Such counterexamples are readily found, but will not here be exhibited.

A portion of Lemma 11 together with Theorem 36 yields

Theorem 37. *Let* $\mathfrak{U}$ *be a normal subdirect sum (or, equivalently, a Boolean extension) of an f-algebra,* $\mathfrak{U}$, *and let*

$$\xi = \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times\wedge} \mu\, a_\mu \tag{19.24}$$

be the normal expansion Theorem 11, or (13.16) *of* $\xi \in \mathfrak{U}$. *In case the binary algebra (= kernel)* $\mathfrak{U}$ *is finite and functionally complete, each normal component,* a_μ, *may itself be expressed* as *a* $\mathfrak{U}$*-function of* ξ,

$$a_\mu = \delta_\mu(\xi). \tag{19.25}$$

Here the $\mathfrak{U}$-function $\delta_\mu(\xi)$ is simply the extension to $\mathfrak{U}$ of the characteristic function $\delta_\mu(\xi)$ of $\mathfrak{U}$, i.e., express $\delta_\mu(\xi)$ as a $\mathfrak{U}$-function, and then replace ξ by $\mathfrak{x}$. By § 15 we may further replace $\times_\wedge$ by $\times_\cap$ in the normal expansion of $\mathfrak{x}$ or of any $\mathfrak{U}$-function, f,

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots) = \overset{\times_\cap}{\sum} f(\alpha, \beta, \ldots)\, \delta_\alpha(\mathfrak{x})\, \delta_\beta(\mathfrak{y}) \ldots . \tag{19.26}$$

Bibliography.

[1] STONE, M. H.: The theory of representations of Boolean algebras. Trans Amer. Math. Soc. **40**, 37—111 (1936). — [2] BIRKHOFF, G.: Subdirect unions in universal algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 764—768 (1944). — [3] McCOY, N. H.: Subrings of direct sums. Amer. J. Math. **60**, 374—382 (1938). — [4] McCOY, N. H.: Subrings of infinite direct sums. Duke Math. J. **4**, 486—494 (1938). — [5] McCOY, N. H.: Subdirectly irreducible commutative rings. Duke Math. J. **12**, 381—387 (1945). — [6] McCOY, N. H.: Subdirect sums of rings. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 856—877 (1947). — [7] McCOY, N. H., and DEANE MONTGOMERY: A representation of generalized Boolean rings. Duke Math. J. **3**, 455—459 (1937). — [8] FOSTER, A. L.: On n-ality theories in rings and their logical algebras, including tri-ality principle in three-valued logics. Amer. J. Math. **72**, 101—123 (1950). — [9] FOSTER, A. L.: The idempotent elements of a commutative ring form a Boolean algebra; ring duality and transformation theory. Duke Math. J. **12**, 143—152 (1945). — [10] FOSTER, A. L.: p-rings and their Boolean-vector representation. Acta math., Stockh. **84**, 231—261 (1950). — [11] FOSTER, A. L.: p-rings and ring-logics. Univ. Calif. Publ. **1**, 385—396 (1951). — [12] FOSTER, A. L.: p^k-rings and ring logics. Ann. Scu. Norm. Pisa **5**, 279—300 (1951). — [13] FOSTER, A. L.: The theory of Boolean-like rings. Trans. Amer. Math. Soc. **59**, 166—187 (1946). — [14] WADE, L. I.: Post algebras and rings. Duke Math. J. **12**, 389—395 (1945). — [15] KRULL, W.: Subdirekte Summendarstellung von Integritatsbereichen. Math. Z. **52** (1950).

University of California, Berkeley, Cal. (USA.).

(Eingegangen am 16. September 1952.)

Verständliche Wissenschaft

Aus dem Leben der Bienen

Von Dr. **Karl v. Frisch**, Professor der Zoologie und Direktor des Zoologischen Instituts an der Universität München. Fünfte, neubearbeitete und ergänzte Auflage. 21.—26. Tausend. (Band 1). Mit 101 Abbildungen, davon 2 farbig. VII, 159 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 7.80

Die Lehre von der Vererbung

Von Professor Dr. **Richard Goldschmidt**, Zoologisches Institut der University of California, Berkeley, Cal. (USA). Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage. (Band 2). Mit 48 Abbildungen. VIII, 212 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 7.80

Wetter und Wetterentwicklung

Von **Heinrich Ficker**, o. Professor für Meteorologie und Geophysik an der Universität Wien. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage. (Band 15). Mit 42 Abbildungen und 11 Karten. VII, 140 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 7.80

Schlaf und Traum

Von Prof. Dr. **Hans Winterstein**, Istanbul. Zweite, verbesserte Auflage. 6. bis 11. Tausend. (Band 18). Mit 25 Abbildungen. VI, 135 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 7.80

Die Welt der Sinne

Eine gemeinverständliche Einführung in die Sinnesphysiologie.

Von **W. v. Buddenbrock**, o. ö. Professor der Zoologie an der Universität Mainz. Zweite, neubearbeitete Auflage. 6.—11. Tausend. (Band 19). Mit 55 Abbildungen. VIII, 147 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 7.80

Baum und Wald

Von **Ludwig Jost**, weil. o. Professor an der Universität Heidelberg. Zweite, durchgesehene Auflage besorgt von **Fritz Overbeck**, o. Professor an der Universität Kiel. (Band 29). Mit 71 Abbildungen. VIII, 148 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 7.80

Die Staaten der Ameisen

Von Dr. **Wilhelm Goetsch**, Honorarprofessor an der Universität Graz, em. Direktor des Zoologischen Instituts und Museums der Universität Breslau. Zweite, ergänzte Auflage. 6.—11. Tausend. (Band 33). Mit 85 Abbildungen. VIII, 152 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 7.80

Sichtbares und unsichtbares Licht

Von Dr. **Eduard Rüchardt**, o. Professor für Physik an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. (Band 35). Mit 137 Abbildungen. VIII, 168 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 7.80

Kleine Erdbebenkunde

Von Dr. **Karl Jung**, o. Professor z. Wv., apl. Professor an der Bergakademie Clausthal, Lehrbeauftragter an der Universität Kiel. Zweite, verbesserte Auflage. 6.—11. Tausend. (Band 37). Mit 101 Abbildungen. V, 158 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 7.80

Ebbe und Flut des Meeres, der Atmosphäre und der Erdfeste

Von Univ.-Professor Dr. **Albert Defant**, Innsbruck. 1.—6. Tausend. (Band 49). Mit 64 Abbildungen. VII, 119 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 7.80

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Einführung in die Atomphysik

Von Professor Dr. **Wolfgang Finkelnburg.** Zweite, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 230 Abbildungen. XII, 416 Seiten. 1951.
DM 34.50; Ganzleinen DM 39.—

Aus den Besprechungen: Die Einführung in die Atomphysik von W. FINKELNBURG hat sich dank ihrer reichhaltigen und dabei präzisen und klaren Darstellung der modernen Atomistik einen führenden Platz unter den Büchern dieser Art errungen. Mit Ungeduld wurde daher die zweite Auflage des Buches erwartet, die jetzt hier vorliegt, und die den Inhalt wieder ganz auf die Höhe der neuesten Entwicklung bringt. Da die 3 Jahre seit Erscheinen der ersten Auflage eine Menge neuer Tatsachen und Gesichtspunkte gebracht haben, war eine gründliche Umarbeitung und Erweiterung erforderlich. Besonders trifft dies für die Kernphysik und die Atomphysik der Festkörper zu, die am stärksten in Bewegung waren. Aber auch auf den anderen Gebieten sind neue Errungenschaften eingefügt wie z.B. die Hochfrequenzspektroskopie, die Anomalie des Elektronenmoments, das Helium-II-Problem und manches andere. Der Umfang ist dabei von 339 auf 416 Seiten angewachsen; der Charakter des Buches als Einführung, Vermittlung eines weiten Überblickes über die Zusammenhänge ist aber voll erhalten geblieben. Auch die sorgfältig zusammengestellten, zum Teil recht originellen Abbildungen der ersten Auflage sind um einige wirkungsvolle Stücke vermehrt worden. So wird das Buch in seiner neuen Form erst recht neue Freunde gewinnen und auch all denen, welche die erste Auflage kennen und mit Vorteil benutzt haben, dank seiner durchgehenden Modernisierung wieder neue Anregung bieten. *„Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung"*

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Grundlagen der Atomphysik

Eine Einführung in das Studium der Wellenmechanik und Quantenstatistik

Von Dr. phil. **Hans Adolf Bauer,** Professor an der Technischen Hochschule und der Universität in Wien. Vierte, umgearbeitete und bedeutend erweiterte Auflage. Mit 244 Textabbildungen. XX, 631 Seiten. 1951. (W) Ganzleinen DM 45.—

Aus den Besprechungen: Wer den Werdegang dieses Buches, beginnend mit dem Besuch der seinerzeitigen Vortragsreihe auf der Wiener Technischen Hochschule und anschließend mit dem Studium der ersten und der folgenden Auflagen persönlich miterlebt hat, kann immer nur staunen, mit welch meisterhafter Geschicklichkeit es der Verfasser versteht, die stürmische Entwicklung seines Spezialgebietes in einer Form vorzuführen, die für den hierfür aufgeschlossenen Chemiker fesselnd und lehrreich ist. Anschauliche, mit Bildern untermalte Darstellung wechselt so geschickt abgestimmt mit streng mathematischer Ableitung, daß beim Leser jede Gefahr der gedanklich zu weit geführten Schlüsse aus dem Bilde vermieden, gleichzeitig aber auch für die Schönheit exakt mathematischer Naturbeschreibung Verständnis erweckt wird. Mit der vierten Auflage ist das Buch auf den doppelten Umfang angewachsen und umfaßt nun auch die SCHRÖDINGERsche Störungstheorie, die relativistische Verallgemeinerung der Wellenmechanik und die Quantenstatistik. . . .
„Österreichische Chemiker-Zeitung"

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.